Unidad 2

Cinemática

2.1 Introducción.

La Cinemática es la rama de la Dinámica que estudia el movimiento de los cuerpos desde un punto de vista descriptivo; es decir, *el objeto de la Cinemática es responder a la pregunta* ***¿cómo se mueven los cuerpos?***

Otra pregunta muy importante es *¿por qué* los cuerpos se mueven de la forma en que lo hacen?; pero su respuesta no es buscada por la Cinemática sino por la *Cinética*, que es lo que estudiaremos en las unidades tres, cuatro y cinco.

De hecho la Cinemática y la Cinética son las dos partes o “ramas” de la Dinámica, cuyo objeto de estudio es el movimiento de los cuerpos en general, tanto su descripción como su explicación.

Por otra parte, la Dinámica y la Estática conforman a la Mecánica, que es la primera de las ciencias modernas. Otras ramas de la Física Clásica se mencionan en el siguiente cuadro

- Física Clásica
  - Mecánica
    - Estática
    - Dinámica
      - Cinemática
      - Cinética
  - Hidráulica
  - Termodinámica
  - Electricidad
  - Magnetismo
  - Acústica
  - Óptica

Ahora bien, la descripción del movimiento debe hacerse en términos cualitativos pero sobre todo en términos *cuantitativos*, por ello es indispensable usar “el lenguaje de la ciencia”, es decir, las matemáticas.

Si nos detenemos un momento y observamos el movimiento de los cuerpos reales, podemos darnos cuenta de su *complejidad*: un hombre camina echando su tronco un poco hacia delante y moviendo rítmicamente las piernas coordinadas con los brazos, un mono salta de una rama a otra haciendo piruetas que son la envidia de cualquier cirquero, una simple hoja de árbol cae al suelo realizando complicados giros y espirales y dejándose llevar por la brisa, hasta una piedra que cae lo hace girando sobre sí misma y por cierto demasiado rápido para poder ser observada detalladamente. ***Los fenómenos en la naturaleza se presentan ante nuestros sentidos como una realidad compleja***.

Hagamos un experimento: dejemos caer una hoja de papel extendida, observamos que al caer la hoja hace una serie de movimientos zigzagueantes y giros, al mismo tiempo que pierde altura, se tuerce, se enrolla sobre sí misma y puede llegar al piso en un punto bastante alejado del que queda directamente debajo de donde se soltó. Un movimiento complicado sin duda. Ahora tomemos la misma hoja y hagamos una bola con ella y dejémosla caer desde la misma altura que en la ocasión anterior. Observamos que ahora cae mucho más rápido y que la trayectoria se aproxima a una línea recta. ¿Cómo es posible que se mueva tan diferente si es el mismo cuerpo?

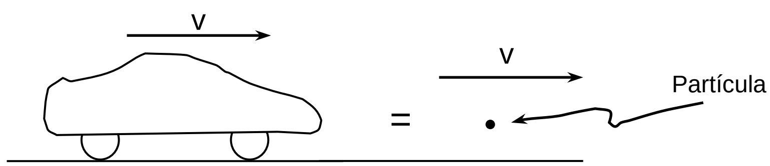
¡Claro! La respuesta está en la forma. El cambio de forma de la hoja de papel modificó notablemente la manera en que cae.

Por cierto, el movimiento de la bola de papel (sobre todo si está bien apretada) se parece al de cualquier objeto más o menos esférico, tal como una canica, un balín, o una piedra. O sea, que ***estos movimientos son semejantes, de manera que su descripción será la misma*.** Este es un ejemplo de ***generalización*** es decir, una elaboración teórica que es válida para un conjunto de fenómenos similares.

2.2 Concepto de partícula.

Dada la complejidad de los fenómenos reales es necesario introducir hipótesis o suposiciones que simplifiquen dicha realidad “despojándola” o dejando de considerar algunas características que son poco relevantes o que complican demasiado la explicación sobre todo en etapas iniciales de la teoría. El caso más importante de hipótesis simplificadora en la Cinemática es la de considerar a los cuerpos como partículas. ***Una partícula es un punto que representa a un cuerpo***. Algunas veces se cree que una partícula es una parte muy pequeña de un cuerpo, aquí el significado, es otro. ***Una partícula es la representación de un cuerpo***.

Expliquémoslo con un ejemplo: supongamos que estudiaremos el movimiento de un auto en una pista recta, para lo cual establecemos un sistema de medición en donde el cronómetro se activará cuando la parte delantera del auto reviente un hilo o corte un rayo de luz, esto ocurre al menos en el principio y al final de la pista, incluso podríamos colocar una serie de medidores en diferentes puntos a lo largo de la pista y tendríamos más mediciones. En este ejemplo la parte delantera del auto es ***el punto o partícula que representa al auto en su totalidad*, es decir *la posición, la distancia recorrida, la velocidad, etc. de ese punto representan a las del auto***. Éstas características son importantes para el estudio del movimiento, por ello se toman en cuenta, otras características del automóvil tales como el color, la marca, su precio o su resistencia a un choque, no son relevantes para el estudio del movimiento, por lo que no se toman en cuenta. Es decir no se asignan a la partícula.

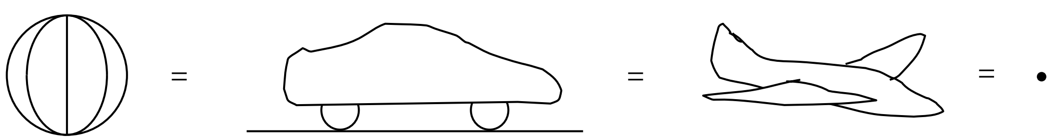


Es común considerar que la partícula coincide con el centro de gravedad del cuerpo, pero como lo vimos en el ejemplo anterior, esto no es obligatorio. Lo importante es que la partícula represente "lo mejor posible" al cuerpo en cuestión. Es decir, lo mejor posible para efectos de la Cinemática.

Tres ventajas importantes se desprenden de considerar a los cuerpos como partículas:

- Al "despojarlos" de su forma se eliminan los giros alrededor de su propio centro así como los movimientos internos.
- El nivel de generalización de la teoría así obtenida es mucho mayor.
- La complejidad del objeto de estudio se reduce notablemente.

En este curso estudiaremos básicamente la dinámica de la partícula, de manera que consideraremos que todos los cuerpos pueden representarse como partículas.



Todos los cuerpos van a ser representados por un punto llamado partícula.

Al concepto de partícula también se le llama ***"punto físico" o "punto material"*** por el hecho de que siendo un punto posee algunas de las *características físicas* del cuerpo real.

Recapitulemos: El movimiento de los cuerpos reales puede ser muy complejo, la forma de los cuerpos influye en su forma de moverse y tiene que ver con la complejidad. La hipótesis simplificadora que utilizaremos en el curso es la de considerar a los cuerpos como partícula. La generalización[1] es algo valioso para la ciencia, ya que permite comprender un conjunto de fenómenos con la misma teoría.

[1] De echo entre mayor es el nivel de generalización de una teoría (entre más fenómenos abarca) resulta más poderosa.

2.3 Movimiento rectilíneo.

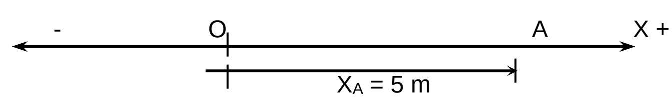
El estudio del movimiento rectilíneo tiene una importancia fundamental en nuestro curso por varios motivos: en primer lugar es el movimiento más simple que se puede presentar[2], en segundo muchos movimientos curvilíneos se pueden descomponer en sus componentes a lo largo de los ejes X,Y,Z, y estudiar como si estuvieran compuestos por dos o tres movimientos rectilíneos ocurriendo al mismo tiempo. En tercero, se considera que con el estudio del movimiento rectilíneo por parte de Galileo Galilei, en el siglo XVI nace la Física, el Método científico y la Ciencia en general, tal y como la entendemos en la actualidad.

2.4 Sistemas de referencia, posición.

El *lugar que ocupa un cuerpo, o sea su posición, siempre es **relativa***. Es decir, está en *relación* con otro objeto. Cuando decimos que algo está arriba, abajo, a la derecha, etc. Implícita o explícitamente indicamos el objeto de referencia: En la indicación "arriba de la mesa", la mesa es el objeto de referencia. "Abajo del árbol" sería una indicación precisa en un jardín con un solo árbol o con uno bien diferenciado, no así en un bosque, donde la indicación sería confusa, ¿a qué árbol te refieres? Sería la pregunta consecuente.

Para ubicar la posición de los objetos con toda precisión es necesario emplear sistemas de referencia y las coordenadas correspondientes, los más utilizados son:

***Sistema lineal** o de una dimensión.* Está formado por un segmento de recta dirigido llamado comúnmente eje X, en donde se define el origen o coordenada cero, y el sentido positivo, (el sentido negativo queda definido en consecuencia). *La posición de un objeto se indica mediante su coordenada y las unidades de longitud* correspondientes.



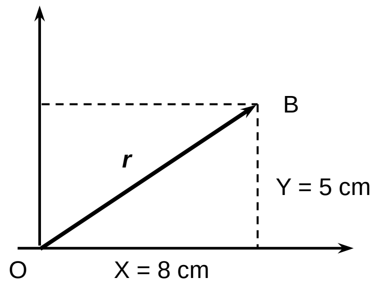
"La posición del objeto (o partícula) A es de 5 metros en sentido positivo (y por supuesto siempre medidos desde el origen)". De manera resumida escribimos: $X_A = 5$ m.

Sistema rectangular plano** o de dos dimensiones.* Está formado por dos ejes perpendiculares entre sí (comúnmente denominados X,Y, pero también puede usarse otros nombres). El punto en el que se cruzan es el origen y también debe definirse el sentido positivo de cada eje. La posición de un objeto está dada por las coordenadas x,y acompañadas de una unidad de longitud. También puede asociársele el vector de posición ***r o ***s*** [3]cuyas componentes coinciden con las coordenadas x,y.

---

[2] Ir de lo simple a lo complejo no es solo un principio pedagógico, también es la dirección histórica en que se ha desarrollado la ciencia. (Esta es una similitud más entre la evolución social y la individual).

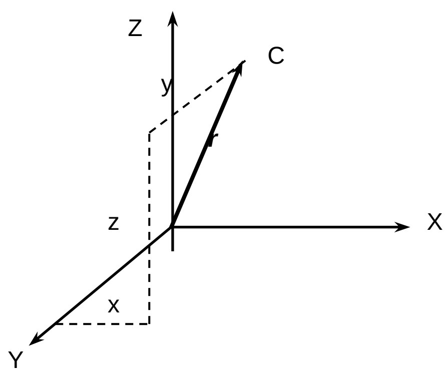
[3] Utilizaremos las letras *cursivas* y en ***negritas*** como notación de los vectores, entonces ***A***, ***s***, ***v***, son vectores. Las *cursivas* denotarán la magnitud de un vector: *A, s, v*, son las magnitudes de los vectores ***A***, ***s***, ***v*** respectivamente.



"La posición de B es: 8 centímetros sobre el eje X en sentido positivo y 5 cm en dirección Y con sentido también positivo."

$\boldsymbol{r}_B$ = (8, 5) cm

Sistema rectangular espacial *o de tres dimensiones.* Está formado por tres ejes perpendiculares entre sí comúnmente denominados X,Y,Z. El punto en el que se cruzan es el origen y también debe definirse el sentido positivo de cada eje. La posición de un objeto está dada por las coordenadas x, y, z acompañadas de la unidad de longitud escogida. También puede asociársele el vector de posición ***r*** cuyas componentes coinciden con las coordenadas x, y, z.



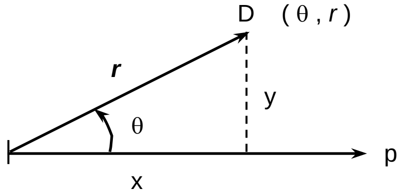
"La posición de C es: x, y, z [L]

$\boldsymbol{r}_c$ = (x, y, z) [L]

Donde [L] son cualquier unidad de longitud.

En adelante escribiremos a las unidades entre corchetes o paréntesis cuadrados para mayor claridad.

Sistema polar plano. Consiste en una recta dirigida o eje polar p, con un origen determinado. A partir de la recta se mide un ángulo en sentido anti horario (contrario a las manecillas de un reloj de manecillas) y una distancia o radio vector ***r*** que va del origen hasta la posición de la partícula, de manera que las dos coordenadas son el ángulo y la magnitud del radio vector (θ , *r*)



La posición de la partícula D es (θ , *r*)

La posición se identifica por el vector ***r***

r = (θ , *r*)

De acuerdo al álgebra de vectores es muy fácil relacionar las coordenadas polares con las rectangulares.

$$|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \theta = ang\ tg\,\frac{y}{x} \quad ; \quad x = r\cos\theta \;; \quad y = r\,sen\theta \qquad (2.1)$$

También están las coordenadas Normal y tangencial, las esféricas o geodésicas: latitud, longitud y altitud o radio, las cilíndricas, consistentes en un ángulo y dos distancias: θ, X, Z, entre otras.

Repitiendo: la ***posición*** es el lugar que ocupa un cuerpo o partícula y se especifica mediante un sistema de referencia y las coordenadas correspondientes.

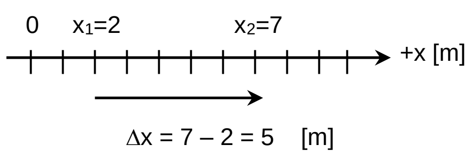
2.5 Desplazamiento, trayectoria y distancia recorrida.

Desplazamiento: es el cambio de posición de una partícula, sus unidades son de longitud (m, cm, Km, pies, etc.) y es un vector con dirección y sentido iguales a los del movimiento.

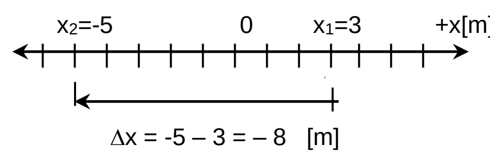
En una dimensión se denota por $\boldsymbol{\Delta x} = x_2 - x_1$ (2.2)

Ejemplo 2.1 La partícula A se mueve desde x_1=2 [m] hasta x_2 =7 [m], por otro lado la partícula B se mueve desde x_1=3 [m] hasta x_2 =-5 [m]. En ambos casos calcular y dibujar el desplazamiento.

Partícula A



Partícula B



En el plano el desplazamiento se define por el vector $\boldsymbol{\Delta r}$ y/o sus componentes $\boldsymbol{\Delta x}$, $\boldsymbol{\Delta y}$.

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \Delta y = y_2 - y_1$$

$\boldsymbol{\Delta r}$ *es la suma vectorial de las componentes* $\boldsymbol{\Delta r = \Delta x + \Delta y}$ (2.3)
es decir, la magnitud del vector de posición está dada por:

$$\left|\vec{\Delta}\mathrm{r}\right| = \Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

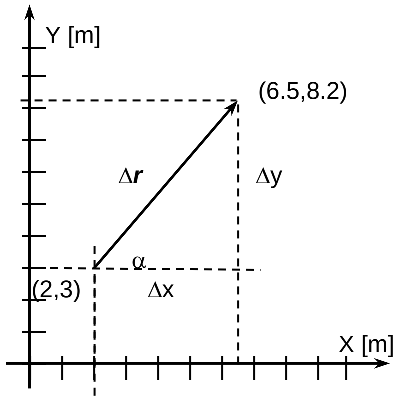
Y su inclinación respecto a la horizontal está definida por el ángulo α donde:

$$\alpha = angtg\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Que se lee "α es el ángulo cuya tangente vale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$"

O también "α es el ángulo que tiene por tangente el valor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$" también se acostumbra la notación: $tg^{-1}\alpha$ para indicar la inversa de la función tangente, que es el cálculo del ángulo a partir de su tangente.

Ejemplo 2.2: Encontrar el desplazamiento de la partícula A que se mueve desde la posición r_1 con coordenadas (2,3) [m] hasta r_2 = (6.5, 8.2) [m]



$\Delta x = x_2 - x_1 = 6.5 - 2 = 4.5$ [m]

$\Delta y = y_2 - y_1 = 8.2 - 3 = 5.2$ [m]

$$|\Delta r| = \Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{4.5^2 + 5.2^2}$$

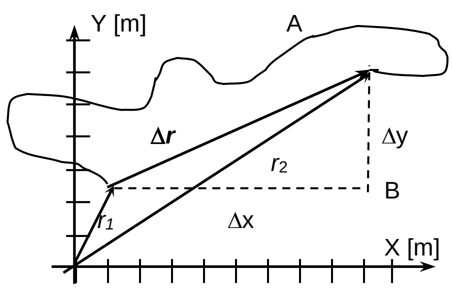
$$|\Delta \mathbf{r}| = \Delta r = 6.88 \text{ [m]}$$

$$\alpha = angtg\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg^{-1}\frac{5.2}{4.5} = tg^{-1}1.1556$$

$$\alpha = 49.128^\circ$$

Otros conceptos interesantes son el de *trayectoria y distancia recorrida*. Se entiende por ***trayectoria*** *el camino* seguido o recorrido por una partícula. La ***distancia recorrida*** *es la longitud de la trayectoria,* se denota por ".d ", sus unidades también son de longitud, pero a diferencia del desplazamiento, *la distancia recorrida es un escalar que siempre tiene valor positivo.*

Ejemplo 2.3. Consideremos un movimiento curvilíneo plano que va de r_1 = (1, 2.5) [m] a r_2 = (9, 6) [m], siguiendo la trayectoria A mostrada en la figura:



El desplazamiento es:

$$|\Delta r| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(9-1)^2 + (6-2.5)^2}$$

$$|\Delta r| = \sqrt{8^2 + 3.5^2} = 8.73 \text{m}$$

Pero la distancia recorrida por la trayectoria A, denotada por d_A es mucho mayor. Para conocerla tendríamos que medir la longitud de la trayectoria curva.

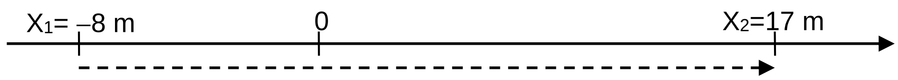
Si B es la trayectoria indicada con línea de guiones, la distancia recorrida por ella, d_B será mayor que el desplazamiento $\boldsymbol{\Delta r}$ pero menor que la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria A. Por la forma geométrica es fácil conocer la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria B como la suma de los catetos.

$$d_B = 8 + 3.5 = 11.5 \text{ m}$$

Nótese que el desplazamiento es el mismo aunque las distancias recorridas, a lo largo de cada trayectoria, sean diferentes.

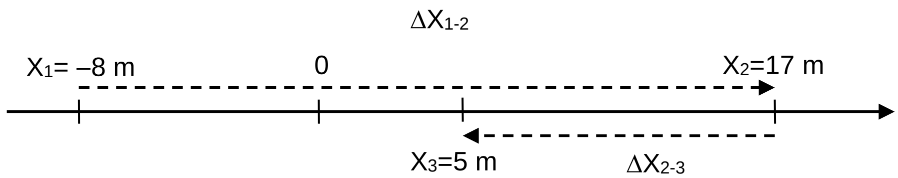
¿Cuánto vale el desplazamiento en una trayectoria cerrada? ...
¿Cuánto vale la distancia recorrida en una trayectoria cerrada? ...

En el movimiento rectilíneo la distancia recorrida es el valor absoluto del desplazamiento si el movimiento va en un solo sentido



$$d = |\Delta x| = |x_2 - x_1| = |17-(-8)| = 25 \text{ [m]}$$

Pero cuando el movimiento va y regresa, la distancia recorrida será la suma de los valores absolutos de los desplazamientos parciales; es decir, los correspondientes a cada tramo



$$d = |\Delta x_{1-2}| + |\Delta x_{2-3}| = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| = |17-(-8)| + |5-17| = 25+12 = 37 \text{[m]}$$

2.6 Velocidad y rapidez.

Como dijimos, el desplazamiento es un cambio de posición, *pero como todos los cambios adquiere un sentido más profundo e importante cuando se relaciona con el tiempo*. Es decir, no es lo mismo desplazarse o correr los 100 metros planos en 10 segundos que hacerlo en 1 minuto, lo primero solo lo han logrado unos cuantos atletas a nivel olímpico, (después de haber entrenado durante años), lo segundo lo puede realizar cualquier personas, son los mismos 100 metros pero el tiempo en que se recorrieron les confiere un significado diferente.

Pongamos otro ejemplo. Ganar 20,000.00 pesos pudiera ser muy atractivo para un profesionista o una persona cualquiera, esa cantidad la podemos representar por un $\Delta\$$ ya que será un incremento sobre el dinero que la persona posea con anticipación; sin embargo hay una cuestión fundamental: *¿cuánto tiempo se va a tardar en ganar esa cantidad?*. La respuesta otorga un sentido completamente diferente a los 20,000 pesos. Si se tarda un año en ganarlos, la situación económica de esa persona y su familia será desastrosa, si gana 20,000.00 pesos al mes, es de esperarse una situación económica medianamente aceptable; pero si gana 20,000.00 pesos al día, su situación económica será de bonanza. En cada caso el mismo $\Delta\$$ adquiere un significado completamente diferente al relacionarlo con el tiempo. ***De este hecho, de la necesidad de relacionar los cambios con el tiempo necesario para que se efectúen, surge el concepto de velocidad.***

Cuando observamos que dos cuerpos pueden realizar el mismo desplazamiento en diferentes lapsos de tiempo, nos encontramos con la necesidad de un nuevo concepto que permita describir esta cuestión, de aquí, *de esta realidad concreta*, surge el concepto de ***velocidad***.

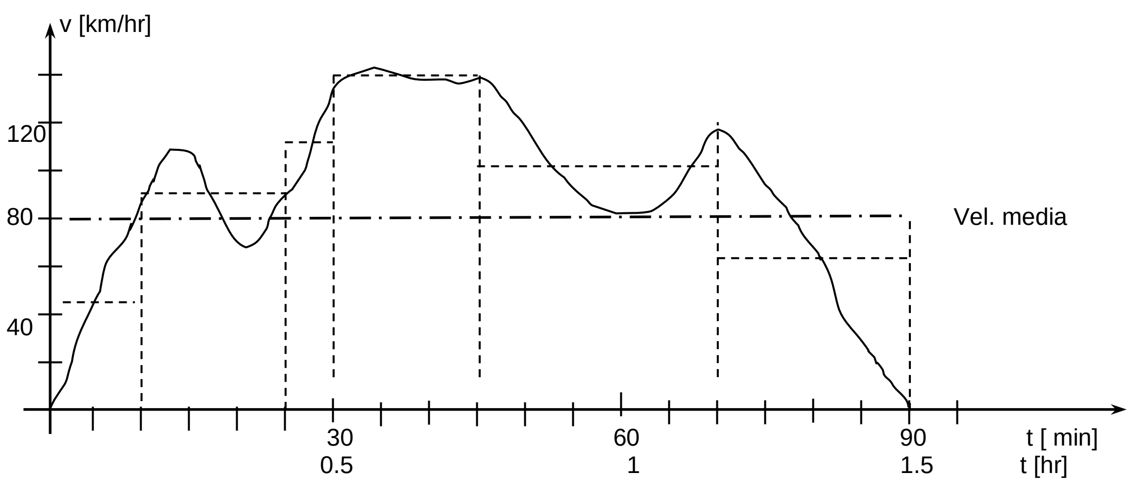
Velocidad media o promedio: Es la relación del desplazamiento realizado entre el tiempo necesario para realizarlo.

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad (2.4)$$

Es un vector con la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento. Sus unidades son unidades de longitud entre unidades de tiempo: m/s, km/hr, pies/min. Etc.

La velocidad media es un concepto práctico y sencillo, si decimos por ejemplo que debemos llegar a una ciudad alejada 120 km en 1.5 hrs, mediante una simple división sabemos que deberemos viajar con una *velocidad promedio* de 80 km/hr.

Sin embargo, en la práctica resultará imposible mantener *constante* la velocidad de 80 km/hr *durante* la hora y media del viaje. Al salir de la ciudad encontraremos zonas de tráfico donde el avance será más lento, al llegar a carretera habrá tramos rectos y horizontales donde será posible viajar a velocidades del orden de 120 km/hr o mayores, en zonas de curvas, habrá que reducir la velocidad al igual que en los tramos en reparación, etc. Si realizamos una gráfica de la velocidad en relación al tiempo obtendremos algo que pudiera ser semejante a lo siguiente:



En esta gráfica la velocidad promedio está representada por la recta horizontal de puntos y guiones, formando un rectángulo de lados vertical 80 km/hr y horizontal 1.5 hr.

¿Qué representa el área de ese rectángulo?...

Veamos: (80 km/hr) (1.5 hr) = 120 km
¡Claro! $(v_m)\ (\Delta t) = \Delta x$

El área bajo la gráfica v-t representa el desplazamiento.

También podemos sacar velocidades promedio en diferentes tramos:

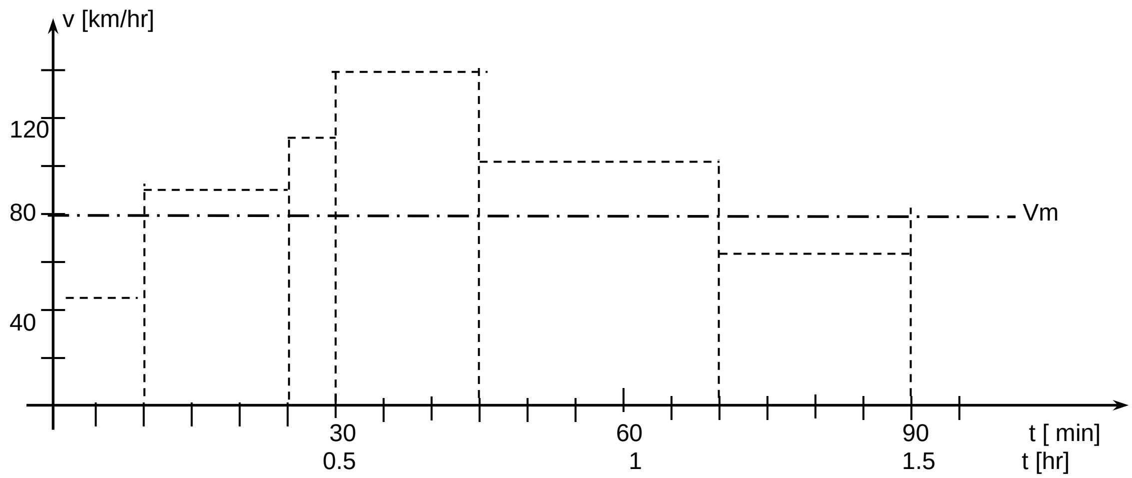
En la gráfica vemos que durante los primeros 10 minutos la velocidad pasó de cero a 90 km/hr aproximadamente y este aumento se realizó de forma casi lineal, de manera que la velocidad promedio en el tramo es del orden de 45 km/hr.

De los 10 a los 25 minutos Se tiene una velocidad media de 90 km/hr con un máximo de 110 km/hr y un mínimo de70 km/hr (aprox.)

De los 30 a los 45 minutos el auto viajo a una velocidad casi constante de 140 km/hr.

De los 45 a los 70 minutos la velocidad promedio es de 90 o 92 km/hr, y en el ultimo tramo de los 70 a los 90 min la velocidad descendió, o sea, el auto fue frenando, de manera casi constante (la gráfica se aproxima a un recta inclinada) hasta llegar a detenerse. La velocidad promedio en ese tramo es de 62 km/hr aproximadamente.

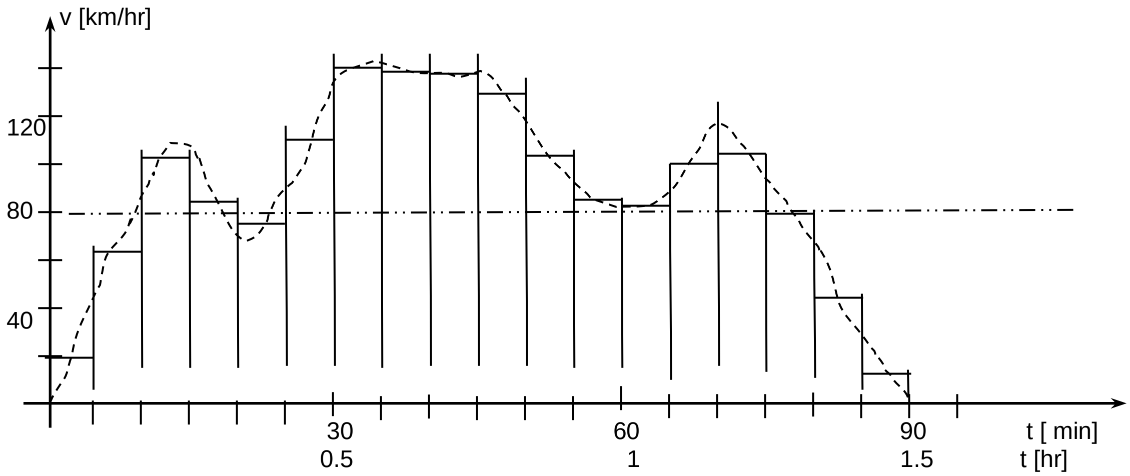
Si graficamos solo las velocidades promedio en los distintos tramos nos quedará lo siguiente:



El área de cada rectángulo representa el desplazamiento parcial realizado en cada lapso de tiempo. La suma del área de todos los rectángulos representa al desplazamiento total (los 120 Km) y será igual al área bajo toda la gráfica curva, y por supuesto igual al área definida por el rectángulo de la velocidad promedio. De hecho, *ese es el significado de la velocidad promedio*, *obtener el mismo desplazamiento en el mismo intervalo de tiempo* ***como si la velocidad hubiera sido constante****.*

Otra cuestión es conocer la velocidad del cuerpo en un tiempo determinado, por ejemplo: ¿Qué velocidad tenía el auto a los 32 min?

Si comparamos la curva v-t y la gráfica de barras, vemos que hay notables diferencias. Si queremos describir el comportamiento de la velocidad con mayor grado de aproximación, deberemos tomar las velocidades promedio en lapsos de tiempo más pequeños, por ejemplo cada 5 minutos



La gráfica de barras así obtenida se aproxima un poco más a la curva. Sin embargo se siguen presentando “saltos” o “escalones” y por lo tanto diferencias entre la gráfica discontinua de barras y la curva continua.

Si continuamos disminuyendo el tamaño de los lapsos de tiempo Δt lograremos cada vez mayor aproximación., de manera que en el límite, cuando estemos tomando lapsos de tiempo extraordinariamente pequeños, la velocidad promedio se transformará en ***velocidad instantánea.***[4] Y por este camino llegamos también al concepto de derivada[5].

Así, definimos a la *velocidad instantánea* como el límite de Δx entre Δt cuando Δt tiende a cero

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Es decir la ***velocidad instantánea*** o simplemente ***velocidad*** se define como la derivada del desplazamiento en relación al tiempo

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (2.5)$$

y es un ***vector tangente a la trayectoria*** *en el punto considerado*.

Sus unidades, al igual que las de la velocidad media, son unidades de longitud entre unidades de tiempo.

La ***rapidez*** es la magnitud del vector velocidad, por lo tanto puede haber rapidez media y rapidez instantánea, de hecho en la mayoría de los problemas de movimiento rectilíneo nos referimos a rapideces, ya que al estar especificada la dirección del movimiento mediante el sistema de referencia, y el sentido de la velocidad mediante el signo,

[4] Nótese como nuevamente los conceptos surgen de la realidad concreta, o de la necesidad que tiene el hombre de reflejar esa realidad en su mente.

[5] Es muy conveniente que el estudiante revise en concepto de derivada, la interpretación gráfica de la derivada y la derivada como una razón de cambio en cualquier libro de cálculo diferencial.

terminamos trabajando con puras magnitudes, es decir rapideces. Obviamente las unidades del escalar "rapidez" son las mismas que las del vector velocidad.

2.7 Aceleración.

Por otro lado vemos que *la velocidad también cambia*, en el ejemplo anterior la velocidad pasó de 140 km/hr en t = 45 min a 80 km/hr en t = 60 min.; es decir el ***cambio de velocidad Δv*** definido como:

$$\Delta v = v_2 - v_1 \qquad (2.6)$$

Fue $\Delta v = 80 - 140 = -60$ [km/hr] (el signo negativo de Δv indica que la velocidad disminuyó).

Una cuestión más importante es: *¿cómo cambia?*, es decir, *¿qué tan rápido cambia?*

Ya habíamos mencionado que cualquier cambio adquiere su verdadero significado al relacionarlo con el tiempo, y esto también ocurre con la velocidad: no es lo mismo que un auto pase de 0 a 100 km/h en 6 u 8 segundos a que requiera 30 0 40 segundos, en el primer caso se trata de un moderno auto deportivo y en el segundo de un auto pequeño y bastante deteriorado, "una carcacha".

Nuevamente, de la práctica, de la realidad concreta, surge la necesidad de definir un concepto para describir el cambio de velocidad en relación al tiempo, a esto se le llama ***aceleración***.

Se define la ***aceleración media o promedio*** como el cociente del cambio de velocidad Δv entre el tiempo necesario para efectuar dicho cambio Δt

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (2.7)$$

La aceleración media es un vector cuya orientación[6] es la del cambio de velocidad Δv, el que, en general, no coincide con la orientación del movimiento, es decir no es tangente a la trayectoria.

Sus unidades son unidades de velocidad entre unidades de tiempo. En unidades generales o "dimensiones físicas" [7] escribimos:

$$[a] = \left[\frac{V}{T}\right] = \frac{L/T}{T} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$$

[6] El término orientación es equivalente al de dirección y sentido.
[7] Las dimensiones físicas son las unidades de carácter general de los diferentes conceptos físicos. Ejemplos de conceptos físicos son: velocidad, aceleración, fuerza, trabajo, energía, potencia, esfuerzo, etc. Las dimensiones se expresan por letras mayúsculas en función de longitud L, tiempo T y masa M o fuerza F, según sea sistemas absolutos (que usan la masa como concepto fundamental) o técnicos (que usan la fuerza como concepto fundamental). Para más información ver E. Izquierdo. "Apuntes sobre sistemas de unidades".

Que se lee: "las unidades generales (o dimensiones) de la aceleración son unidades (cualesquiera) de velocidad entre unidades (cualquiera) de tiempo, es decir longitud L entre tiempo T entre T, o sea longitud entre tiempo al cuadrado o LT^{-2}.

En unidades particulares del sistema MKS la aceleración se mide en m/s/s es decir metros por segundo en cada segundo. Esto nos permite entender mejor el significado de la aceleración, que como habíamos dicho *es el cambio de velocidad en la unidad de tiempo*.

Por ejemplo, si decimos que una partícula tiene una aceleración de *2 metros por segundo, cada segundo*, significa que el valor de la velocidad se va a incrementar en 2 m/s *en cada segundo que pase*, de manera que si el cuerpo parte del reposo (v = 0), al final del primer segundo ya tendrá una velocidad de 2 m/s, al final del segundo lapso de tiempo (que es de un segundo) la velocidad valdrá 4 m/s, al tercer segundo ya valdrá 6 m/s, etc.; es decir, *la velocidad aumenta 2 m/s en cada segundo que pasa*. Esto lo podemos resumir en la siguiente tabla:

t [s]	v [m/s]	a [m/s/s]
0	0	2
1	2	2
2	4	2
3	6	2
4	8	2
5	10	2
Etc.		

Es decir, la velocidad aumenta 2 m/s ***cada segundo***, siendo ese el valor de su ***aceleración***

.

Es común realizar la división principal de las unidades de aceleración:

$$[a] = \frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2}$$

Pero la interpretación de los "segundos cuadrados" o "al cuadrado" resulta demasiado abstracta. En unidades particulares del sistema inglés, la aceleración se mide en pies pies/s/s = ft/s^2.

De manera similar a la velocidad media, la aceleración media es un concepto bastante burdo por carecer de precisión. Por ello es preferible tomar intervalos de tiempo cada vez más y más pequeños hasta llegar al límite cuando Δt tienda a cero, entonces:

Definimos a la ***aceleración instantánea*** o simplemente ***aceleración*** como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (2.8)$$

Que por supuesto es igual a la segunda derivada de la posición respecto al tiempo

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2.9)$$

La aceleración instantánea es un vector cuya orientación coincide con la de dv, que en general no es tangente a la trayectoria, y sus unidades son las mismas que las de la aceleración media.

Podemos desarrollar otra expresión para la aceleración combinando las definiciones de velocidad y aceleración:

Despejando dt de $v = \frac{dx}{dt}$ queda: $dt = \frac{dx}{v}$ sustituyendo en $a = \frac{dv}{dt}$

Queda:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx / v} = \frac{vdv}{dx}$$

O bien $$adx = vdv \qquad (2.10)$$

En la cual podemos observar que no aparece el tiempo.

2.8 Descripción del movimiento.

Recapitulando: El objeto de estudio de la Dinámica es el fenómeno del *movimiento.* Como cualquier fenómeno, el movimiento es una realidad (o porción de la realidad), de carácter *complejo*; es decir *está conformado por muchas partes y sus relaciones*, a esas partes las identificamos mediante *conceptos físicos*, que en el caso del movimiento son: *posición, desplazamiento, tiempo, velocidad y aceleración*, entre otros. Cada concepto debe estar definido, de preferencia matemáticamente. El objeto de la Cinemática es la descripción del movimiento, y esta descripción la haremos en lenguaje matemático, es decir:

> La posición estará expresada mediante una ecuación “en función” del tiempo
> x = f (t),
> la velocidad será otra función (o ecuación) del tiempo v = f’ (t),
> y la aceleración será otra función del tiempo a = f’’ (t)

Como sabemos las comillas indican no solo que son funciones diferentes, sino que están relacionadas por la primera y segunda derivadas como ya lo explicamos.

Así, la descripción de un movimiento quedará completa cuando conozcamos estas tres ecuaciones ya que a partir de ellas podremos conocer el valor de las tres características principales x, v, a, en cualquier tiempo.

De manera complementaria en ocasiones se dibuja la gráfica de alguna o todas las ecuaciones lo que ayuda a una mejor comprensión.

Procedimiento de solución.

Cuando se conoce la relación (dada por una ecuación) entre dos de los conceptos cinemáticos principales, esto es: x, t, v, a, las relaciones que describen a los otros conceptos se pueden obtener mediante alguna (s) de las ecuaciones:

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad\qquad a = \frac{dv}{dt} \qquad\qquad adx = vdv$$

¿Cómo?, Fácil, ***sustituyendo la relación conocida, en la ecuación que contenga a los dos conceptos ya relacionados y al tercer concepto cuya ecuación se desea obtener.***

¡Ésta es la clave! (Así que ¡apréndetela!)

Ya hecha la sustitución, la ecuación que resulta se resuelve por derivación o integración, según corresponda.

Por otra parte, ***el sentido de las cantidades vectoriales debe estar de acuerdo con el sistema de referencia***; es decir, si un vector va en el mismo sentido que el indicado como positivo por el sistema de referencia, el vector es positivo. Si el vector apunta en el sentido negativo del sistema de referencia, será negativo. Lo anterior tiene que coincidir con el signo en las ecuaciones; también es preferible que el sentido positivo coincida con el del movimiento, pero esto no es indispensable, y en casos en que el cuerpo va y viene, como el tiro vertical, siempre hay una parte del movimiento que ocurre en sentido positivo y otra en sentido negativo; no obstante es preferible usar un solo sistema de referencia para describir todo el movimiento.

Lo anterior quedará más claro en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.4. Una partícula se mueve en línea recta de acuerdo a la ecuación:
$x = 8t^3 + 25t^2 – 34$ [mm], donde x se expresa en milímetros y t en segundos. Encontrar:

a) las expresiones de velocidad y aceleración.
b) los valores de x, v, a, para t = 1, 2, 3, 4, 5 [s].
c) el desplazamiento en el intervalo de tiempo desde t = 2 [s] hasta t = 5[s].
d) la velocidad media en el mismo intervalo de tiempo.

Solución:

a) $$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(8t^3 + 25t^2 - 34)}{dt} = 24t^2 + 50t \text{ [mm/s]}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(24t^2 + 50t)}{dt} = 48t + 50 \text{ [mm/s/s]}$$

b) Los valores de x, v, a, en los distintos tiempos se han obtenido sustituyendo en las ecuaciones correspondientes, los resultados se han organizado en la siguiente tabla:

t [s]	x [mm]	v [mm/s]	a [mm/s/s]
0	-34	0	50
1	-1	74	98
2	130	196	146
3	407	366	194
4	878	584	242
5	1591	850	290

c) El desplazamiento desde t = 2 [s] hasta t = 5[s] está dado por:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 1591 - 130 = 1461 \text{ [mm]}$$

d) La velocidad media se define como $v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{1461}{5-2} = 487$ [mm/s]

Ejemplo 2.5. Una partícula se mueve en línea recta y su posición está dada por $x = 3t^2 - t^3$ [m] donde t se mide en [s]. Encontrar las tres ecuaciones del movimiento y graficarlas.

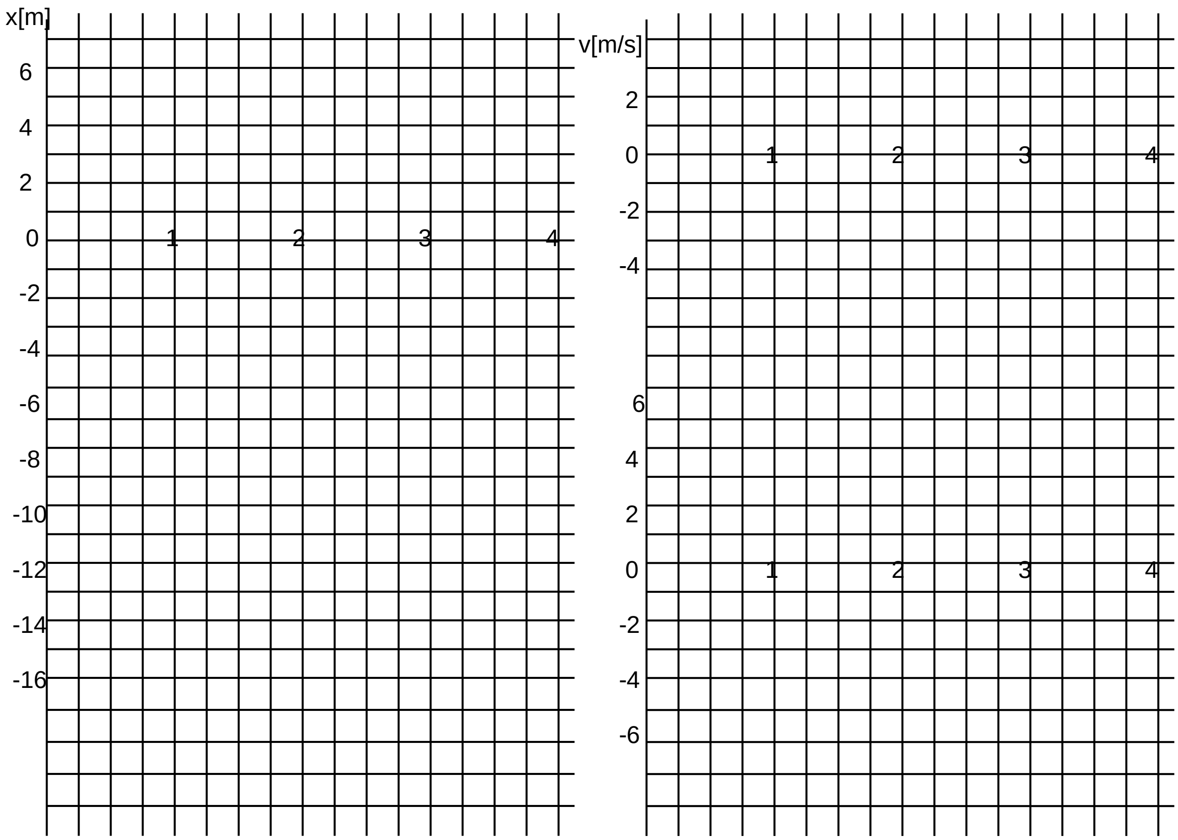
Solución:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(3t^2 - t^3)}{dt} = 6t - 3t^2 \quad \text{[m/s]} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(6t - 3t^2)}{dt} = 6 - 6t \quad \text{[m/s/s]}$$

Antes de graficar tabularemos algunos valores de cada variable en función del tiempo

t [s]	x [m]	v [m/s]	a [m/s/s]
0	0	0	6
0.5	0.625	2.25	3
1.0	2	3	0
1.5	3.375	2.25	-3
2.0	4	0	-6
2.5	3.125	-3.75	-9
3.0	0	-9	-12
3.5	-6.125		-15
4.0	-16	-24	-18

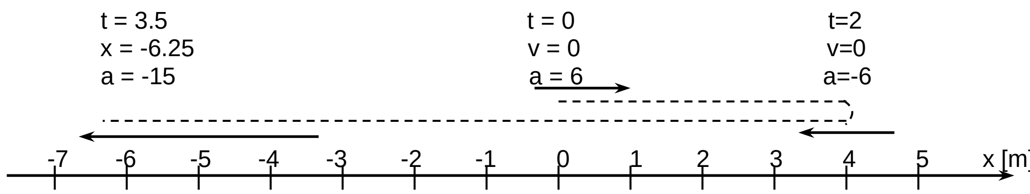
Para graficar utilizaremos la siguiente cuadrícula, utilizando la escala horizontal para medir tiempo y la vertical para medir x, v, a sucesivamente.



Observando las gráficas encontramos que: cuando t=0, el cuerpo está en el origen (x=0) y empieza a moverse en sentido positivo con una velocidad creciente, ya que la aceleración es positiva; sin embargo la aceleración no es constante, sino que disminuye linealmente hasta llegar a cero cuando t=1 [s], lo que ocasiona que la velocidad aumente hasta ese momento, pero cada vez lo hace en menor medida.

Cuando t=1 [s] la velocidad toma un valor máximo de 3 [m/s] que obviamente coincide con el valor cero de la aceleración, ya que siendo la aceleración la pendiente de la gráfica v-t, la velocidad tiene un máximo un mínimo cuando a=0.
Análogamente, cuando t = 2 [s], v = 0 [m/s] y la partícula se encuentra en la posición máxima x = 4 [m]. (ya que v=dx/dt es la pendiente de la gráfica x-t y vale cero en ese t). Hasta ese momento la partícula se ha movido hacia la derecha, en ese preciso momento sufre un cambio de sentido (al pasar por v = 0) y empieza a moverse hacia la izquierda puesto que v se vuelve negativa. Y como a también es negativa, el resultado es que se mueve hacia la izquierda cada vez más rápido.

La trayectoria del movimiento la podemos dibujar un poco separada del eje x para que se pueda apreciar (aunque en realidad la partícula se mueve sobre el eje x).



Nótese que la velocidad siempre tiene el mismo sentido que el movimiento, no así la aceleración.

Ejemplo 2.6. La aceleración de una partícula se aproxima a la ecuación a = 4t [m/s/s], determinar las ecuaciones para v, x, y sus valores cuando t = 2 [s], teniendo en cuenta que cuando t = 1 [s], x = 3 [m] y v = 3 [m/s].

Solución:

De la ec. a = dv/dt, podemos despejar dv, quedando dv = a dt

Al sustituir tenemos dv = 4t dt

La cual podemos integrar $\int dv = \int 4tdt$

Quedando $v = 2t^2 + c_1$

Para conocer c_1 sustituimos los valores conocidos de v = 3 [m/s] cuando t = 1 [s]. Entonces sustituyendo valores iniciales:

$$3 = 2(1^2) + c_1$$

Donde $c_1 = 1$ [m/s]

Entonces la ecuación de velocidad queda $v = 2t^2 + 1$ [m/s]

Para conocer la ecuación de posición, aplicamos v = dx/dt

Despejando dx = v dt

Sustituyendo dx = $(2t^2 + 1)$dt

Integrando de manera indefinida $\int dx = \int (2t^2 + 1)dt$

$$x = \frac{2}{3}t^3 + t + C_2$$

Para encontrar C_2 sustituimos las condiciones iniciales correspondientes, es decir

x = 3 [m] cuando t = 1 [s]

$3 = 2/3\ (1^3) + 1 + C_2$

$C_2 = 3 – 2/3 – 1 = 1.3333$

Entonces $x = (2/3)\ t^3 + t + 1.3333$ [m]

Obsérvese que C_2 = 1.3333 [m] es la posición inicial de la partícula: es decir, la posición que la partícula tiene cuando t = 0.

Para encontrar los valores de posición y velocidad cuando t = 2 [s] resolvemos las ecuaciones para ese valor de t.

$x = 2/3\ (2)^3 + 2 + 1.333 = 8.6667$ [m]

$v = 2\ (2)^2 + 1 = 9$ [m/s]

Otro aspecto interesante surge cuando analizamos las unidades de los diferentes términos de cada ecuación.

Consideremos nuevamente la ecuación de la aceleración a = 4t [m/s/s] ¿Que unidades tiene el coeficiente de t (es decir el 4)?.

La respuesta es lógica, y parte del hecho de que la aceleración debe medirse en [m/s/s] y que t se mide en segundos: por lo tanto las unidades del coeficiente 4 deberán ser tales que al multiplicarse por segundos queden unidades de aceleración, en símbolos escribimos:

[a] = [4t]
m/s/s = [4] s
[4] = m/s^3

o sea que las unidades del coeficiente 4 son m/s^3 necesariamente, a pesar de que no exista interpretación física para dichas unidades.

En el caso de la ecuación de velocidad $v = 2t^2 + c_1$ podemos investigar cuales son las unidades de c_1 y del coeficiente 2 de la siguiente manera: Si las unidades de v son [m/s], las unidades de los sumandos de la ecuación también deben de serlo, es decir se debe de cumplir

$[v] = [2t^2] + [c_1]$
m/s = m/s +m/s

O sea $[2t^2]$ = m/s, y $[c_1]$ = m/s

Analizando la primera expresión $[2t^2] = [\ 2\ ]\ [\ t^2\ ]$
m/s = [2] s^2

Despejando [2] = (m/s) / s^2 = m/s^3

Lo cual es lógico ya que el coeficiente de v, proviene de la división del coeficiente de la aceleración el cual se dividió entre "n+1" de acuerdo con la fórmula de integración

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

Finalmente podemos analizar las unidades de la ecuación de posiciones.

$$x = (2/3)\ t^3 + t + 1.3333.$$

Nuevamente si las unidades de x son m, entonces las unidades de cada sumando también lo deben de ser, o sea:

$$[\ x\ ] = m\ ; \qquad [\ (2/3)\ t^3\ ] = m\ ; \qquad [\ t\ ] = m\ ; \qquad [1.3333] = m$$

Entonces:

$$[\ (2/3)\ t^3\ ] = [\ 2/3\ ]\ [\ t^3\ ]$$
$$m \ = \ [2/3]\ s^3$$
$$[2/3] = m/s^3$$

Éste coeficiente también proviene de una integración.
Para el siguiente sumando existe un coeficiente 1 que no aparece explícito

$$[\ t\ ] = [1]\ [\ t\ ]$$
$$m = [1]\ s$$
$$[1] = m/s$$ que coincide con la unidades de c_1

Finalmente es evidente que: $[1.3333] = m$ y dado que es la posición de la partícula cuando t = 0, se le puede llamar “posición inicial”.

Ejemplo 2.7. La aceleración de una partícula oscilante es proporcional al desplazamiento medido desde su punto de equilibrio y siempre en sentido contrario al movimiento. Encontrar el valor de la constante de proporcionalidad de una partícula oscilante tal que v = 3 [m/s] cuando x = 0 y v = 0 [m/s] cuando x = 1 [m].
Solución: De acuerdo con la información proporcionada $a = -\ k\ x$ y como en esta relación no existe el tiempo utilizaremos la Ec. que no lo contiene:

$$a\ dx = v\ dv$$

Sustituyendo $v\ dv = -\ k\ x\ dx$

Integrando $\int v dv = -k \int x dx$

$$\frac{v^2}{2} = -k\frac{x^2}{2} + C_1$$

Multiplicando todo por 2 $v^2 = -kx^2 + 2C_1$ como $2C_1$ sigue siendo constante le llamaremos C_2

Entonces $v^2 = -kx^2 + c_2$

Sustituyendo valores conocidos v = 0 [m/s] cuando x = 1 [m]

$$0 = -\ k\ (1^2) + C_2$$

Por lo que $k = C_2$

Entonces $v^2 = -kx^2 + k$

Sustituyendo los otros valores conocidos v = 3 [m/s] cuando x = 0 [m]

$$3^2 = -k(0^2) + k$$
$$9 = k$$

Y las ecuaciones de aceleración y velocidad quedan:

$$a = -9x \qquad v^2 = -9x^2 + 9$$

Obsérvese que había dos grados de indeterminación (dos constantes desconocidas) en la primera Ec. de velocidad, por lo que fue necesario utilizar dos pares de datos.

Ejemplo 2.8 La aceleración de una partícula está dada por la ecuación a = 2t [m/s^2] si $v=-9$ [m/s] y x=6[m] cuando t=0 [s], encontrar: A) el instante en que la velocidad es cero. B) la posición cuando la velocidad es cero. C) la distancia recorrida cuando t=4[s]. D) el desplazamiento de 0 a 4 [s]

Solución:

Primero encontramos las ecuaciones del movimiento

$$a=\frac{dv}{dt}=2t$$

$$dv=2tdt$$

$$\int dv=2\int tdt$$

$$v=\frac{2t^2}{2}+c_1$$

Sustituyendo $v=-9$ [m/s] cuando t=0[s]

$$v=t^2-9$$

$$v=\frac{dx}{dt}=t^2-9$$

$$dx=(t^2-9)dt$$

$$\int dx=\int(t^2-9)dt$$

$$x=\frac{t^3}{3}-9t+c_2$$

Sustituyendo x=6[m] cuando t=0[s]

$$x=\frac{1}{3}t^3-9t+6$$

Luego sustituimos valores en puntos clave

A) encontramos el tiempo en que v=0

$$0=t^2-9$$

$$9=t^2$$

$t=3$ [s] cuando v=0

Este instante y la posición correspondiente son importantes porque ahí se logra un avance máximo y es donde da vuelta la partícula.

B) la posición cuando v=0

$$x=\frac{1}{3}3^3-9(3)+6$$

$$x=\frac{1}{3}3^3-9(3)+6=-12 \text{ [m]}$$

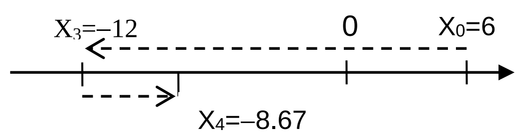
C) la distancia recorrida cuando t=4 [s].

La posición si t =4 [s] es:

$$x=\frac{1}{3}4^3-9(4)+6$$

$$x=-8.67 \text{ [m]}$$

La distancia recorrida se encuentra por tramos, y vale la pena hacer un dibujo representando la trayectoria



siempre es positiva y se calcula sumando el valor absoluto de los desplazamientos parciales $|\Delta x|=|x_2-x_1|$

Tramo 1 de 6 a 0 $|0-6|=6$

Tramo de 0 a -12 $|-12-0|=12$

Tramo de -12 a -8.67 $|-8.67-(-12)|=3.33$

Distancia total

$d=6+12+3.33=21.33$[m]

D) El desplazamiento de 0 a 4 [S]

$\Delta x=x_4-x_0=-8.67-6=-14.67m$

Ejemplo 2.9 El movimiento de una partícula está dado por $x = 2t^3 - 18t^2 + 48t - 16$ donde x está medido en mm y t en s. Encontrar A) el instante en que la velocidad es cero. B) La posición y la distancia recorrida cuando la aceleración vale cero. C) La posición, el desplazamiento y la distancia recorrida cuando t=6[s].

Solución:

$x = 2t^3 - 18t^2 + 48t - 16$ [mm] (1)

$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 36t + 48$ [mm/s] (2)

$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 36$ [mm/s²] (3)

El tiempo en que v=0 lo encontramos sustituyendo este valor en la ec (2), resolviendo la ec. de 2º grado

$t_1 = 2$ [s]

$t_2 = 4$ [s]

El tiempo en que a=0 lo encontramos sustituyendo este valor en la ec (3) y resolviendo

$t_3 = 3$ [s]

Las respectivas posiciones las encontramos sustituyendo los valores de t en la ec (1). Organizamos los resultados en la tabla siguiente

t [s]	x [mm]	V [mms]
0	-16	
2	24	0
3	20	
4	16	0
6	56	

B) d cuando a=0 es decir a los 3 [s]

$|\Delta x_{0-2}| = |24 - (-16)| = 40$ [mm]

$|\Delta x_{2-3}| = |20 - (24)| = 4$ [mm]

$d_{0-3} = 40 + 4 = 44$ [mm]

C) d y Δx a los 6 [s]

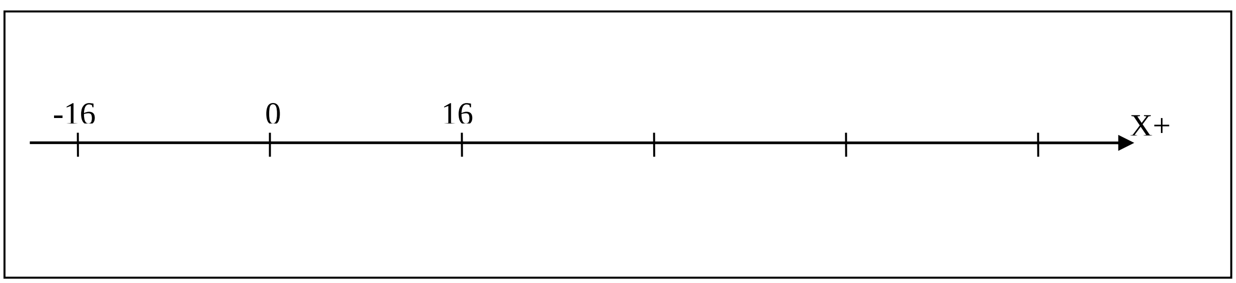
$|\Delta x_{3-4}| = |16 - 20| = 4$ [mm]

$|\Delta x_{4-6}| = |56 - 16| = 40$ [mm]

$d_{0-6} = 44 + 4 + 40 = 88$ [mm]

$\Delta x_{0-6} = 56 - (-16) = 72$ [mm]

Dibuja la trayectoria y marca las posiciones y tiempos importantes en el siguiente eje[8]



[8] Observa que hubiera sido mejor dibujar la trayectoria después de llenar la tabla y antes de responder los incisos B) y C).

2.9 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA).

La característica principal de este movimiento es que su aceleración es constante, por lo que se pueden resolver las ecuaciones diferenciales del movimiento y expresarlas como ecuaciones algebraicas.

De la definición de aceleración $a = dv/dt$
Despejamos $dv = a\,dt$

Integrando desde la rapidez v_o que la partícula tiene en el tiempo $t_0 = 0$, hasta la rapidez v que es la que tiene en el tiempo t, y tomando en cuenta que a = cte.

$$\int_{v_0}^{v} dv = a\int_{0}^{t} dt$$

$$v - v_0 = at$$

O bien
$$v = v_0 + at \qquad (2.11)$$

Sustituyendo en la definición de velocidad $v = dx / dt$ tenemos

$$v_0 + at = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = (v_0 + at)dt$$

Integrando desde la posición inicial x_0 que ocupa en el tiempo $t_0 = 0$ hasta la posición x que la partícula ocupa en el tiempo t

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (v_0 + at)dt$$

$$x - x_0 = v_0\int_{0}^{t} dt + a\int_{0}^{t} tdt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (2.12)$$

Integrando la ec. $a\,dx = v\,dv$ desde la posición inicial x_0 donde la rapidez es v_0, hasta la posición x donde la rapidez es v, tenemos

$$a\int_{x_0}^{x} dx = \int_{v_0}^{v} vdv$$

$$a(x - x_0) = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^{\,2})$$

O bien $$v^2 = v_0{}^2 + 2a(x - x_0) \qquad (2.13)$$

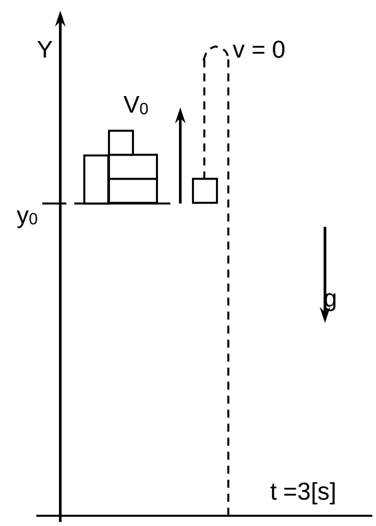
Es importante tener presente que las ecs. 1.11, 1.12 y 1.13 solo ***son válidas si la aceleración es constante.***

Ejemplo 2.10. Cuando se estaba elevando una tarima con mercancías, a una rapidez de 5 m/s, una caja se desprendió de la tarima y tardó 3 s en llegar al piso: A) ¿Cómo es la trayectoria que siguió la caja al desprenderse de la tarima? B) ¿con que rapidez llegó la caja al suelo? C) ¿a qué altura estaba la tarima cuando la caja cayó?

Solución:

A) La velocidad inicial de la caja en el momento en que se separa de la tarima es la misma que ésta, es decir 5 m/s hacia arriba, de manera que la caja continúa subiendo[9]; sin embargo, la aceleración de la gravedad (con sentido hacia abajo) va frenando a la caja hasta que, en el punto de máxima altura, la velocidad es cero v = 0 por un instante, inmediatamente después se invierte el sentido de la velocidad y la caja empieza a caer con rapidez creciente hasta chocar con el piso.

La trayectoria se dibuja en la siguiente figura. En donde se muestra la caja en el instante en que se separa de la plataforma.



El sistema de referencia que escogemos es un eje vertical “y” con origen en el piso y sentido positivo hacia arriba

B) mediante la ec. 2.11podemos obtener la velocidad al momento de llegar al piso.

$$v = v_0 + at$$

Sustituyendo valores $v = 5 + (-9.81)(3)$

Queda v = -24.4 [m/s]

Obsérvese como los signos están de acuerdo al sistema de referencia: todo lo que va hacia arriba es positivo y hacia abajo es negativo…(en este caso particular).

C) Mediante la ec. 2.12 podemos encontrar la posición inicial y_0 cuando la caja se separó de la tarima, adaptada al sistema de referencia del problema queda:

[9] Decimos que la caja se desprendió de la tarima y no que cayó de ella para ayudar a entender que la caja sigue subiendo aunque sea con velocidad cada vez menor; sin embargo un observador colocado en la tarima verá que la caja “cae” es decir se queda debajo de la tarima y la distancia entre ellas va aumentando, lo cual también es correcto. Por eso se dice que el movimiento es relativo al sistema de referencia.

$$y - y_0 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Dado que la velocidad inicial y la aceleración son conocidas, para resolverla debemos elegir un punto en donde también sean conocidas el tiempo y la posición dejando la posición inicial como incógnitas, esto ocurre para t = 3 [s], tiempo en el cual y = 0 [m] sustituyendo valores

$$0 - y_0 = 5(3) + \frac{1}{2}(-9.81)(3^2)$$

$$y_0 = 29.1 \text{ [m]}$$

Para comprobar que la trayectoria sea la descrita podemos calcular la altura máxima, la cual deberá ser mayor que y_0. La condición especial para que la altura sea máxima es que la v = 0, de hecho es el único punto en el que esto ocurre, y dado que no conocemos el tiempo en el cual esto sucede, usaremos la ec. 2.13 que no contiene al tiempo

$$v^2 = v_0{}^2 + 2a(x - x_0)$$

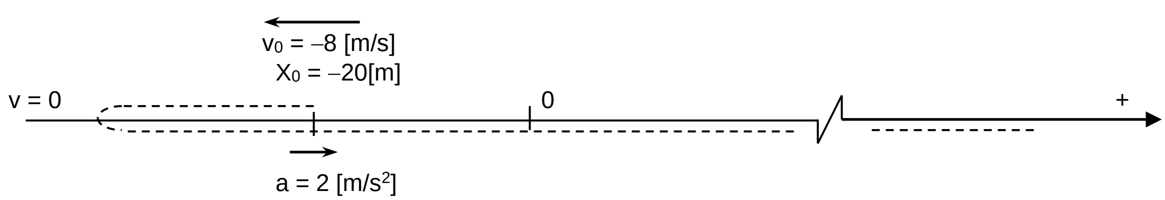
Sust. $$0^2 = 5^2 + 2(-9.81)(y - 29.1)$$

$$y = 30.37 \text{ [m]}$$

Por lo tanto la descripción de la trayectoria es correcta.

Ejemplo 2.11 Una partícula se mueve horizontalmente en línea recta de manera que cuando pasa por x = –20 [m] lleva una velocidad de 8 [m/s] hacia la izquierda. Si durante todo el movimiento mantiene una aceleración de 2 [m/s^2] hacia la derecha, encontrar:
A) el tiempo y la posición en que la rapidez vale cero.
B) El instante en que pasa por x = 0 y la rapidez que lleva.
C) la Posición y la rapidez 6 [s] después que pasa por x = 0.
D) La distancia recorrida hasta ese instante.

Solución: Primero escogemos un sistema de referencia positivo a la derecha. Puesto que la velocidad inicial va hacia la izquierda y la aceleración a la derecha es de esperarse que la rapidez (la magnitud de la velocidad) vaya disminuyendo, en algún punto pase por cero, se invierta su sentido y a partir de ahí aumente.



A) el tiempo y la posición en que la rapidez vale cero. $v = v_0 + at$ $0 = -8 + 2t$ $t = \frac{8}{2} = 4$ [s] $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$		$v = v_0 + at$ $v = -8 + 2(10)$ $v = 12$ [m/s] C) la Posición y la rapidez 6 [s] después que pasa por x = 0. Entonces el tiempo será 16 [s]

$$x=-20+(-8)4+\frac{1}{2}(2)4^2$$

$x=-36$ [m]

B) El instante en que pasa por x = 0 y la rapidez que lleva.

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$0=-20-8t+\frac{1}{2}(2)t^2$$

$$t^2-8t-20=0$$

Aplicando la formula Gral. Para resolver ecuaciones de 2º grado

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$t=\frac{-(-8)\pm\sqrt{8^2-4(1)(-20)}}{2}$$

$$t=\frac{8\pm12}{2}$$

$t_1=10$ [s]

$t_2=-2$ [s]

Los tiempos negativos no tienen interpretación física, por lo cual a los 10 [s] la partícula pasa por el origen y su velocidad será:

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$x=-20+(-8)16+\frac{1}{2}(2)16^2$$

$x=108$ [m]

$v=v_0+at$

$v=-8+(2)16$

$v=24$ [m/s]

D) La distancia recorrida es la longitud de la trayectoria, por lo que su cálculo siempre requiere de un esquema claro de la misma. Los cálculos anteriores confirman que el esquema inicial es correcto, por lo que procedemos a calcular la longitud de los distintos tramos:

Tramo 1 de -20 a -36

$|\Delta X_1|=36-20=16$

Tramo 2 de 36 a 0

$|\Delta X_2|=36-0=36$

Tramo 3 de 0 a 108

$|\Delta X_3|=108-0=108$

Distancia recorrida de 0 a16 [s]

$d=|\Delta X_1|+|\Delta X_2|+|\Delta X_3|$

$d=16+36+108=160$ [m]

Ejemplo 2.12 Un avión toca tierra a 180 km/hr, 4 [s] después, el piloto frena de manera constante durante 46 [s] hasta que se detiene. Encontrar la aceleración y la distancia total recorrida.

Solución:

$$v_0=180\frac{km}{hr}\left(\frac{1000m}{1km}\right)\left(\frac{1hr}{3600s}\right)=50m/s$$

En el primer tramo la velocidad v_0 es constante, dura 4 [s] y colocamos el origen del sistema donde el avión toca tierra, de manera que el desplazamiento del primer tramo es:

$$\Delta x_{0-1}=x_1-x_0=v_0t=x_1-0+50(4)=200$$

$\Delta x_{0-1}=200$ [m]

que es igual a la posición al final de ese tramo $\Delta x_1=200$[m] ya que x_0=0

$$a_{1-2}=\frac{v_2-v_1}{t}=\frac{0-50}{46}=-1.087 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

El desplazamiento en el segundo tramo es

$$\Delta x_{1-2}=v_1t+\frac{1}{2}at^2$$

$$\Delta x_{1-2}=50(46)+\frac{1}{2}(-1.087)(46)^2=1150$$

$\Delta x_{1-2}=1150$ [m]

De manera que la posición final se puede encontrar como la suma de los desplazamientos parciales

En el segundo tramo, la aceleración es constante y desconocida, dura 46[s] y termina en v = 0. Primero determinamos la aceleración despejándola de la ec. $v = v_0 + at$		$x_2 = \Delta x_{0-1} + \Delta x_{1-2} = 200 + 1150$ [m] $x_2 = 1350$ [m] Esta posición coincide con la distancia recorrida porque el movimiento ocurre con un solo sentido.

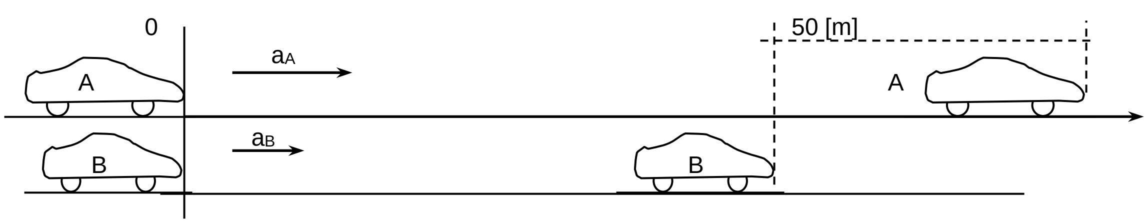
2.10 Movimientos simultáneos.

Existen muchos casos en los que intervienen dos o más partículas que se mueven al mismo tiempo pero de manera que el movimiento de una es independiente del movimiento de la otra; es decir, *la única relación entre las partículas es que **comparten un espacio y un tiempo**, y este hecho se transforma en la clave de la solución, ya que la expresión matemática de esa condición será definitoria.*

Recomendaciones de solución:

- Establecer un ***sistema de referencia único*** para acotar las posiciones de *todas* las partículas.
- ***Utilizar subíndices*** en las variables de las ecuaciones para especificar claramente a que partícula corresponde.
- A partir de la información del problema o de las preguntas planteadas, ***establecer una relación*** *entre las posiciones u otras variables involucradas,* ***que reflejen la condición particular del problema***. Al sustituir las ecuaciones de cada partícula en la relación establecida, se encuentra la solución.

Ejemplo 2.13. Dos autos A y B arrancan desde un mismo punto al mismo tiempo, el auto A tiene una aceleración constante de 1.5 [m/s/s] y el auto B solo acelera a 0.8 [m/s/s] también constante. Calcular el tiempo y la posición de cada auto cuando A haya aventajado a B por 50 [m].



Solución:
La condición de ventaja de A sobre B puede expresarse con la ecuación

$$x_A = x_B + 50 \qquad (1)$$

de manera que si sustituimos las ecuaciones de posición de cada partícula en esta “relación de posiciones” podremos solucionar el problema. Veamos:

$$x_{A0} + v_{0A}t + 1/2\, a_A t^2 = x_{0B} + v_{0B}t + 1/2\, a_B\, t^2 + 50$$

Como las posiciones iniciales de ambos cuerpos son la misma, ambos parten del reposo y al mismo tiempo, la ec. anterior queda:

$$1/2\, a_A\, t^2 = 1/2\, a_B\, t^2 + 50$$

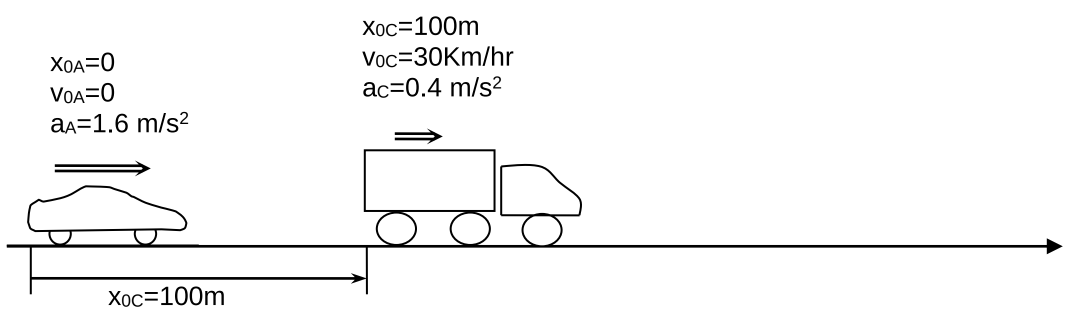
Sustituyendo valores

$$(1/2)\,(\,1.5\,)\,t^2 = (1/2)\,(0.8)\,t^2 + 50$$

$$t = 11.95 \quad [s]$$

En este tiempo se cumple la condición fijada en la relación (1). Para comprobar se puede sustituir este t en las ecuaciones de posición de cada partícula y debe resultar que *en ese instante* la diferencia de posiciones es de 50 m estando A delante de B. Nótese que se utilizaron subíndices para identificar las posiciones y aceleraciones de A y B, no así en el tiempo, ya que es el mismo para ambos autos.

Ejemplo 2.14. Un auto A parte del reposo con aceleración constante a_A=1.6 [m/s^2]. Al mismo tiempo, 100m más adelante, un camión C viaja en el mismo sentido con velocidad de 30 [km/hr] y acelerando a a_C= 0.4 [m/s^2]. Encontrar: A) El tiempo que tarda A en alcanzar a C. B) El lugar donde ocurre. C) La rapidez que lleva cada uno.



Solución:

La velocidad inicial de C

$$v_0 = 30\frac{km}{hr}\left(\frac{1000m}{1km}\right)\left(\frac{1hr}{3600s}\right) = 8.33 m/s$$

La posición de A en cualquier momento es $x_A = x_{0A} + v_{0A}t + \frac{1}{2}a_A t^2 = \frac{1}{2}1.6t^2$

$$x_A = 0.8t^2 \qquad (1)$$

La posición de C en cualquier momento

$$x_C = x_{0C} + v_{0C}t + \frac{1}{2}a_C t^2$$

A) Resolviendo la ec. de segundo grado

$t = 21.6$ [s]

B) Las posiciones de cada móvil las encontramos sust. Este tiempo en (1) y (2)

$x_A = 0.8t^2 = (0.8)(21.6)^2 = 373.23$ [m]

$x_C = 100 + 8.33(21.6) + 0.2(21.6)^2$

$x_C = 373.26$ [m]

C) las velocidades

$$v_A = v_{0A} + a_A t = 0 + 1.6(21.6)$$

$$x_C = 100 + 8.33t + \frac{1}{2}(0.4)t^2$$

$$x_C = 100 + 8.33t + 0.2t^2 \qquad (2)$$

A alcanza a C cuando

$$x_A = x_C$$

$$0.8t^2 = 100 + 8.33t + 0.2t^2$$

$$0.6t^2 - 8.33t - 100 = 0$$

$$v_A = 34.56\,{}^{m}\!/_{s} = 124.4\,{}^{km}\!/_{hr}$$

$$v_C = v_{0C} + a_A t = 8.33 + 0.4(21.6)$$

$$v_C = 16.97\,{}^{m}\!/_{s} = 61\,{}^{km}\!/_{hr}$$

Ejemplo 2.15

Un auto que viaja a 120 km/hr constante y pasa a un agente de tránsito estacionado en una motocicleta, si el motociclista tarda 5[s] en arrancar y lo hace con aceleración uniforme de 4m/s^2 , ¿cuándo y dónde la moto alcanza al auto?

Solución:

$$v_{A0} = 120\frac{km}{hr} = 33.33 m/s$$

Observemos que cada cuerpo se mueve durante diferentes lapsos de tiempo, si tomamos como origen el punto donde el motociclista estaba estacionado, la posición de cada cuerpo estará dada por:

$$x_A = x_{0A} + v_{0A}t_A = 0 + 33.33t_A \qquad (1)$$

$$x_M = x_{0M} + v_{0M}t_M + \frac{1}{2}a_M t_M{}^2 = 2t_M{}^2 \qquad (2)$$

Además el auto en cualquier momento ha viajado 5 [s] más que la moto

$$t_A = t_M + 5 \qquad (3)$$

Sust (3) en (1) ponemos el tiempo del auto en función del de la moto

$$x_A = 33.33(t_M + 5) = 33.33t_M + 166.65$$

Cuando M alcanza a A sus posiciones son iguales

$$x_A = x_M$$

$$33.33t_M + 166.65 = 2t_M{}^2$$

$$2t_M{}^2 - 33.33t_M - 166.65 = 0$$

Resolviendo la ec de 2º grado por la fórmula general

$$t_M = \frac{-(-33.33) \pm \sqrt{33.33^2 - 4(2)(-166.65)}}{2(2)}$$

$t_M = 20.69$ [s]

Sust en (3)

$t_A = 20.69 + 5 = 25.69$ [s]

La posición de cada cuerpo es

$x_A = 33.33(25.69) = 856.31$ [m]

$x_M = 2(20.69)^2 = 856.31$ [m]

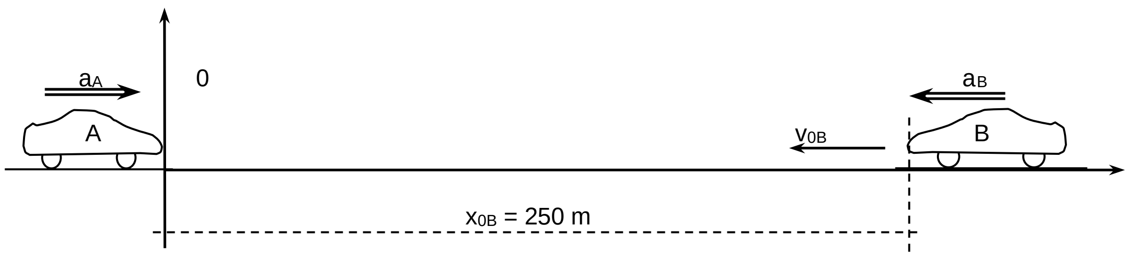
Otra manera de solucionar este problema es calcular la posición del auto a los 5 [s] de haber pasado a la moto; es decir en el momento que ésta arranca. (de manera similar al problema 2.14)

Tomar esta como posición inicial del auto y a partir de ese momento medir el tiempo común para ambos cuerpos,

Al igualar las ecuaciones de posición encontraríamos el tiempo en que M alcanza a A y luego, al sustituir en las ecs. de posición, el lugar en que esto ocurre,

¡Inténtalo!

Ejemplo 2.16. El auto A parte del reposo con aceleración constante de $a_A = 3$ m/s^2. 250 m adelante y en sentido contrario, el auto B pasa a 30 km/hr y acelerando a $a_B = 1.5\ t^{1/2}$. a) cual es la posición de cada auto cuando la velocidad de A es de 80 km/hr. B) Cual es la distancia entre los autos en ese momento.



Solución:

$$v_{0B} = 30\frac{km}{hr}\left(\frac{1000m}{1km}\right)\left(\frac{1hr}{3600s}\right) = 8.33m/s$$

$$v_{FA} = 80\frac{km}{hr}\left(\frac{1000m}{1km}\right)\left(\frac{1hr}{3600s}\right) = 22.22m/s$$

A) para el auto A. El tiempo en que A tarda en llegar a 80 km/hr se obtiene de

$$v_A = v_{0A} + a_A t$$

$$t = \frac{v_A - v_{0A}}{a_A} = \frac{22.22 - 0}{3} = 7.4[s]$$

su posición en ese instante es

$$x_A = x_{A0} + v_{0A}t + \tfrac{1}{2}a_A t^2$$

$$x_A = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}3(7.4)^2 = 82.3[m]$$

Para el auto B primero hay que encontrar las ecuaciones de su movimiento

$$a_B = -1.5t^{1/2} = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = -1.5t^{1/2}dt$$

$$\int dv = -1.5\int t^{1/2}dt$$

$$v_B = -1.5\frac{t^{3/2}}{3/2} + C_1$$

Como $v_B = 8.33$ m/s cuando t =0
sust $C_1 = 8.33$ m/s = v_{0B}

$$v_B = -t^{3/2} - 8.33$$

$$v_B = -t^{3/2} - 8.33 = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = (-t^{3/2} - 8.33)dt$$

$$\int dx = \int(-t^{3/2} - 8.33)dt$$

$$x_B = -\frac{2}{5}t^{5/2} - 8.33t + C_2$$

como $x_B = 250$ cuando t = 0

$$x_B = -\frac{2}{5}t^{5/2} - 8.33t + 250$$

si t = 7.4 [s]

$$x_B = -\frac{2}{5}(7.4)^{5/2} - 8.33(7.4) + 250$$

$$x_B = 128.77[m]$$

B) Entonces la distancia entre los dos autos es

$$D = x_B - x_A = 46.47[m]$$

Ejemplo 2.17. Relacionado con el problema anterior, pudiera interesarnos donde y cuando los autos se cruzan

Solución:

Los autos se cruzan cuando

$$x_A = x_B \qquad (1)$$

entonces igualando las ecuaciones que definen las posiciones de los dos autos encontraremos el tiempo en el cual se cruzan es decir en el cual las posiciones son iguales

$$1.5t^2 = -\frac{2}{5}t^{5/2} - 8.33t + 250 \qquad (2)$$

como la ecuación es de difícil solución procederemos por aproximaciones sucesivas, para lo cual organizaremos los resultados en la siguiente tabla:

t	x_A	x_B	$x_A - x_B$
8	96	110.9	-14.9
9	121	77.8	43.2
8.2	100.86	104.67	-3.8
8.21	101.1	104.35	-3.25
8.3	103.3	101.4	1.9
8.25	102.09	103.07	-0.98
8.26	102.34	102.75	-0.41
8.27	102.59	102.43	0.15

¿Qué significa que la diferencia $x_A - x_B$ sea positiva?

Observamos que el los autos se Cruzan en algún instante entre t = 2.26 [s] y t = 2.27 [s]. Con el último valor la diferencia $x_A - x_B$ es positiva indicando que ya se cruzaron y la distancia entre ambos es de 15 cm.

El procedimiento de aproximaciones sucesivas puede continuar hasta aproximarse tanto como se desee. Nosotros lo detendremos aquí por considerar que el ejemplo ha cumplido con su función pedagógica y que la aproximación es suficiente.

Destacamos dos aspectos importantes
1.- el método de aproximaciones sucesivas nos permite resolver ecuaciones de difícil solución algebraica.
2.- la clave de la solución del problema, al igual que en los anteriores, es la "traducción" de la condición particular "los autos se alcanzan" en una ecuación

$$x_A = x_B$$

2.11 Movimientos dependientes.

Existen otros problemas en los que intervienen varios cuerpos pero estos se encuentran interconectados por cuerdas y poleas, barras y articulaciones o relacionados físicamente de alguna forma (engranes y cremalleras por ejemplo), de manera tal, que el movimiento de un cuerpo *depende* del movimiento del otro.

Procedimiento de solución:

1.- Establecer un ***sistema de referencia único*** para ***todas*** las partículas. Debemos especificar el origen y la dirección positiva.

2.- ***Acotar y asignar nombre*** a la posición de cada partícula, ***a partir del origen*** del sistema de referencia y ***en la misma orientación*** que la trayectoria de la partícula considerada. Repitiendo. ***La posición de cada cuerpo debe señalarse con un segmento dirigido que inicie en el origen del sistema de referencia.***

3.- ***Relacionar las posiciones*** de las partículas ***mediante una ecuación*** que refleje la relación física existente. ***Esto se logra a partir de las porciones del cable o barra que se mueven junto con las partículas y cuya suma permanece constante.*** *Esta ecuación se puede establecer con base en un sistema de referencia común, de ahí la importancia del paso 2.* Se debe establecer una ecuación para cada interconexión física.

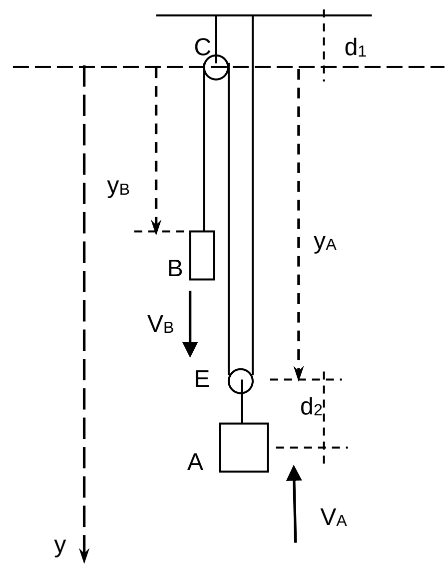
4.- Al encontrar la primera y segunda derivadas respecto al tiempo, de la relación de posiciones, obtendremos las relaciones de velocidades y de aceleraciones respectivamente.

Ejemplo 2.18. Calcular la velocidad con la que sube el bloque A cuando el cuerpo B baja a v_B = 0.3 [m/s].

***Solución*:** Siguiendo el procedimiento:

1.- El sistema de referencia lo ubicamos en el centro de la polea fija C, vertical y positivo hacia abajo.

2.- Acotamos las posiciones de cada partícula. La distancia d_1 del soporte de la polea C no se toma en cuenta porque no se mueve al hacerlo los bloques. La distancia d_2 es constante, entonces, la polea E se mueve igual que el bloque A, por lo que la podemos considerar representativa del mismo, con la ventaja que al acotar hasta ahí la posición de A, estableceremos más fácilmente *la relación de posiciones "con aquella porción del cable que se mueve junto con las partículas"*; es decir



3.- $$2y_A + y_B = L \qquad (1)$$

Siendo L una constante que la podemos conceptuar como la *"longitud útil"* de la cuerda es decir sin contar con el tramo d_1 ni los dos medios perímetros de las poleas. *Lo importante es que* ***es constante***, como se verá en el siguiente paso.

4.- Derivamos la relación de posiciones

$$2\frac{dy_A}{dt} + \frac{dy_B}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

Es decir
$$2v_A + v_B = 0 \qquad (2)$$

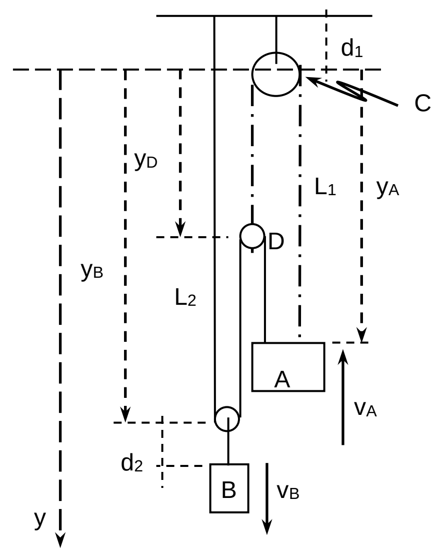
O sea $$v_A = -\frac{v_B}{2} = -\frac{0.3}{2} = -0.15 \text{ [m/s]}$$

Lo cual significa que A sube (lo positivo va hacia abajo) a 0.15 [m/s].

Si el movimiento fuese acelerado, se podría obtener la relación de aceleraciones derivando la ec. 2.

Ejemplo 2.19. Calcular la velocidad con que el bloque A se mueve si el bloque B baja a 0.15 [m/s]

Solución: Siguiendo el procedimiento



1.- El sistema de referencia lo ubicamos en el centro de la polea fija C, vertical y positivo hacia abajo.

2.- Acotamos las posiciones de cada bloque y de la polea D que une a las dos cuerdas. Las distancias d_1 y d_2 no se toman en cuenta. Plantearemos dos ecuaciones, una por cada cuerda:

3.- Para la cuerda 1

$$y_A + y_D = L_1 \qquad (1)$$

Para la cuerda 2

$$y_B + (y_B - y_D) + (y_A - y_D) = L_2$$

$$2y_B - 2y_D + y_A = L_2 \qquad (2)$$

Derivando (1) $\quad v_A + v_D = 0$ es decir $v_D = -v_A \qquad (1')$

lo cual es lógico ya que A y D están conectadas por una cuerda que pasa por una polea fija.

Derivando (2) $\quad 2v_B - 2v_D + v_A = 0 \qquad (2')$

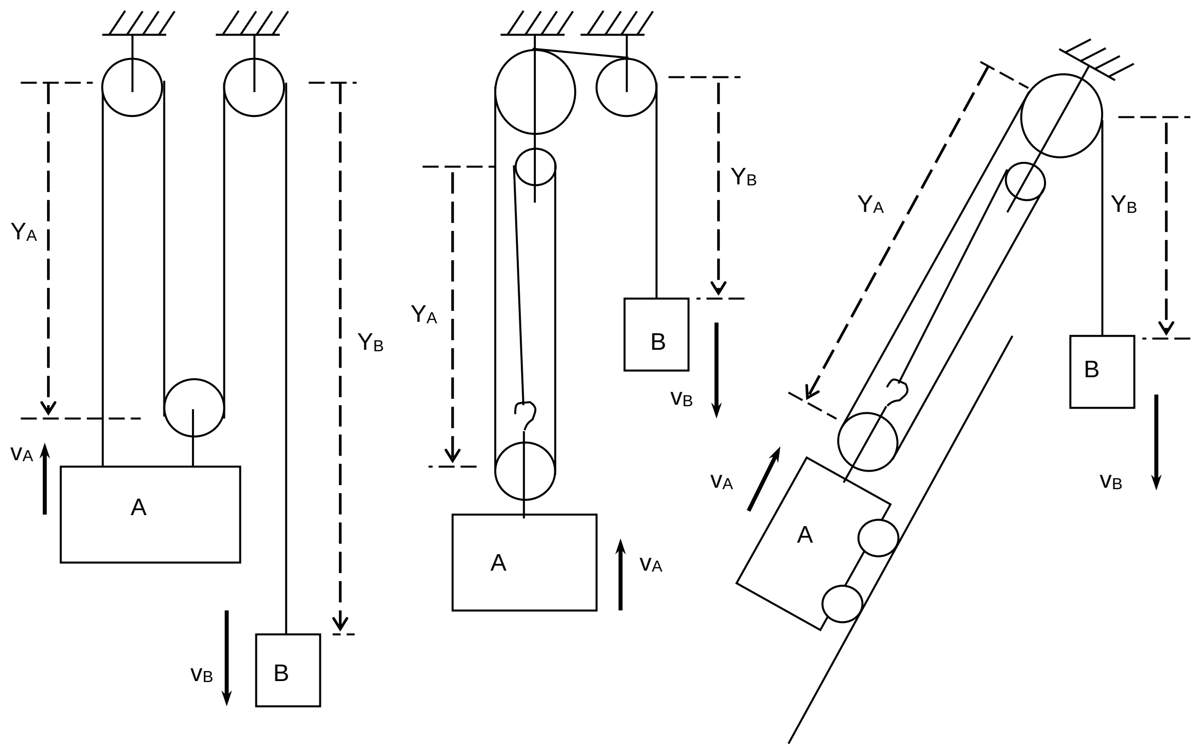
Sustituyendo (1') en (2') $\quad 2v_B - 2(-v_A) + v_A = 0$

$$2v_B + 3(v_A) = 0$$

$$v_A = -\frac{2}{3}v_B \quad \text{[m/s]}$$

Sistemas equivalentes.

Son aquellos que presentan las ***mismas relaciones cinemáticas*** aunque la disposición sea diferente; es decir las diferencias se presentan en el nivel de la apariencia pero el ***funcionamiento cinemático*** es igual. Por ejemplo, los tres sistemas mostrados a continuación "parecen" diferentes:



Sistema 1 Sistema 2 Sistema 3

Pero al analizar su movimiento encontramos que para todos los casos sus relaciones cinemáticas son:

$$3Y_A + Y_B = L$$

Derivando respecto a t $\quad 3v_A + v_B = 0$

Y $\quad 3a_A = -a_B$.

Por lo tanto son equivalentes. Nótese el uso "flexible" de los sistemas de referencia.

2.12 Movimiento curvilíneo en coordenadas rectangulares.

En muchos casos la descripción del movimiento curvilíneo, ya sea en el plano o en el espacio, se simplifica si para ello se usan componentes rectangulares. En tal caso, el movimiento espacial o plano se puede describir como si estuviera formado por tres o dos movimientos rectilíneos, ocurriendo simultáneamente a lo largo de los ejes. Este “truco” es la clave de la solución de todos los ejercicios y problemas de este tipo.

Definiciones vectoriales de los conceptos cinemáticos.

La ***posición*** de una partícula está dada por el vector de posición ***r***

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} \qquad (2.14)$$

Donde ***x, y, z***, son las componentes vectoriales de ***r*** , mientras ***i, j, k*** son los vectores unitarios en dirección de cada uno de los ejes. Por lo general, las magnitudes de las componentes son funciones del tiempo, es decir:

$$x = x(t)\,; \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

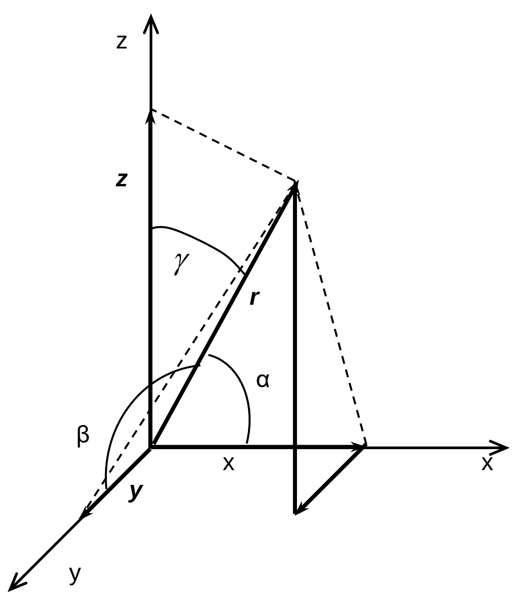
De modo que el vector de posición ***r*** también es una función (vectorial) del tiempo

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

su magnitud será:

$$|\,\boldsymbol{r}\,| = r = \sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$$

y su orientación estará dada por los *ángulos directores*, es decir los ángulos formados entre el vector y cada uno de los ejes.



Estos ángulos están contenidos en los planos inclinados, de forma triangular, formados por el vector y las componentes. Aunque al dibujarlo en el plano se deforma, cada uno es un triángulo rectángulo, ya que la línea de proyección y el eje forman un ángulo recto.

En cada caso, la componente viene siendo el cateto adyacente al ángulo agudo o director, y el vector ***r,*** la hipotenusa. Por ello podemos conocer el valor de los ángulos mediante la función coseno

$$\cos\alpha = x / r$$
$$\cos\beta = y / r$$
$$\cos\gamma = z / r$$

A los estos cosenos se les conoce como cosenos directores y los ángulos están dados por:

α = ang cos x / r ; β = ang cos y / r ; γ = ang cos z/ r

La ***velocidad*** está dada por:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_x} + \boldsymbol{v_y} + \boldsymbol{v_z} = v_x\,\boldsymbol{i} + v_y\,\boldsymbol{j} + v_z\,\boldsymbol{k} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \qquad (2.15)$$

Siendo

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

La magnitud de la velocidad llamada rapidez está definida por:

$$|\,\boldsymbol{v}\,| = v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}$$

La orientación del vector velocidad está dada por los ángulos directores, formados por cada una de las componentes y el vector ***v***, de manera similar al vector de posición, y siempre es tangente a la trayectoria.

La ***aceleración*** también es un vector con tres componentes dado por:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_x} + \boldsymbol{a_y} + \boldsymbol{a_z} = a_x\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j} + a_z\,\boldsymbol{k} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad (2.16)$$

Siendo

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

La magnitud de la aceleración está definida por:

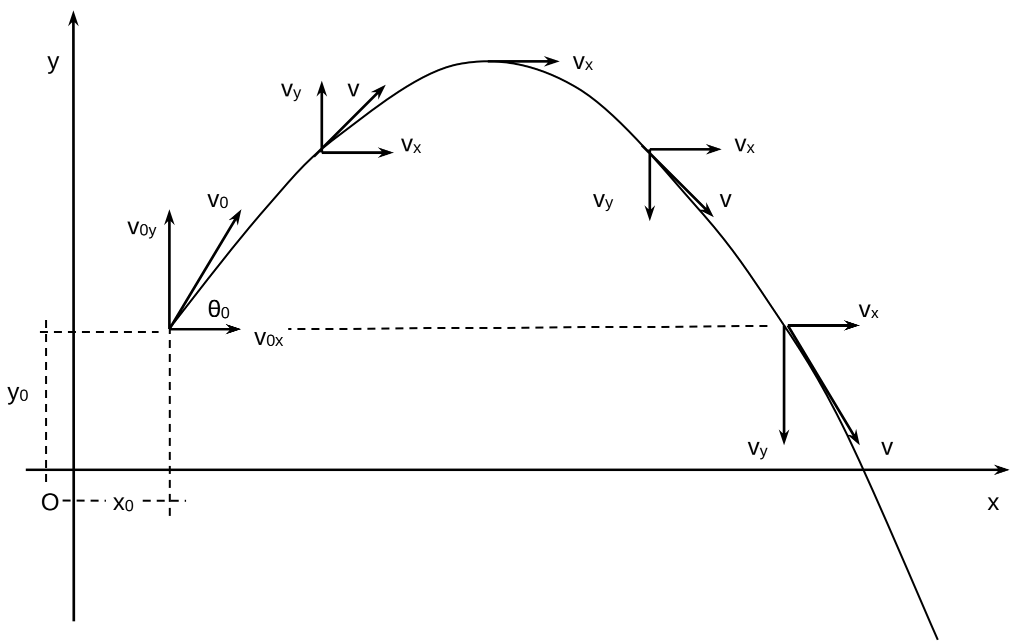
$$|\,\boldsymbol{a}\,| = a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$$

La orientación del vector aceleración está dada por los ángulos directores, formados por cada una de las componentes y el vector ***a***, y en general no es tangente a la trayectoria.

2.13 Tiro parabólico.

Cuando los cuerpos son arrojados al aire con un ángulo vertical cualquiera, describen una trayectoria que se aproxima bastante a una parábola y se denominan proyectiles. En el caso ideal, cuando se prescinde de la resistencia del aire, la parábola es perfecta, y constituye un ejemplo sencillo de movimiento en el plano con coordenadas rectangulares.

Consideremos un movimiento de este tipo que se inicia en (x_0 , y_0) , como se muestra en la figura:



Como habíamos mencionado, la clave para describir un movimiento curvilíneo es la descomposición en sus componentes a lo largo de los ejes. Así, para el tiro parabólico se consideran dos componentes:

La ***componente horizontal que es un movimiento rectilíneo con aceleración cero*** $\mathbf{a_x = 0}$ y velocidad constante: $\mathbf{v_x = cte}$ de manera que solo se cuenta con una ecuación que es la de posición:

$$x = x_0 + v_x t \qquad (2.17)$$

O bien

$$\Delta x = x - x_0 = v_x t \qquad (2.17')$$

La ***componente vertical es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado*** cuya aceleración es igual a la de la gravedad $\mathbf{a_y = g}$. Entonces está descrito por tres ecuaciones:

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2.18)$$

$$v_y = v_{0y} + g t \qquad (2.19)$$

$$v_y^{\,2} = v_{0y}^{\,2} + 2g(\,y - y_0\,) \qquad (2.20)$$

Es claro que para cualquier punto (x, y) que la partícula ocupa en el tiempo t, las componentes de la velocidad son:

$$v_x = v \cos\theta \qquad y \qquad v_y = v \operatorname{sen}\theta \qquad (2.21)$$

O bien, si a partir de las componentes se desea conocer la velocidad ***v*** como vector, su magnitud está dada por:

$$|v| = v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} \qquad (2.22)$$

Y su orientación está definida por:

$$\theta = angtg\frac{v_y}{v_x} \qquad (2.23)$$

Otro aspecto a resaltar es la simetría respecto a un eje vertical, por ello (al igual que el tiro vertical) a una misma altura corresponden dos velocidades de igual magnitud una que sube y otra que baja.

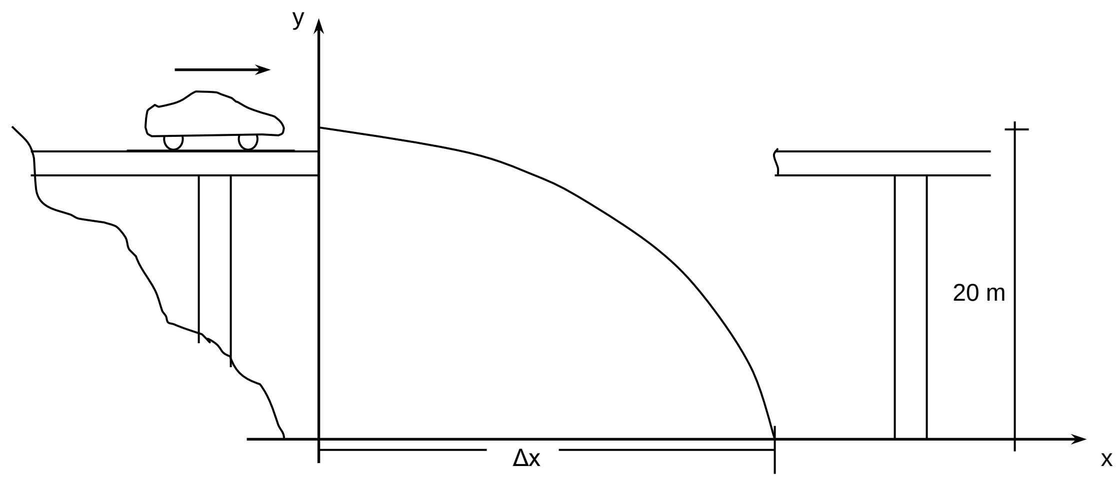
Procedimiento de análisis:

1.- Establecer (dibujar) claramente el sistema de referencia, especificando el origen y las direcciones positivas de ambos ejes.

2.- Escribir las ecuaciones y analizarlas identificando los datos que tenemos y las incógnitas que buscamos.

3.- Resolver simultáneamente los movimientos rectilíneos sobre los ejes, recordando que *lo que relaciona a ambos movimientos rectilíneos* ***es el tiempo*** *y las ecuaciones anteriores*. Esto lo ilustraremos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.20. Un puente horizontal se ha derrumbado a causa de una avenida extraordinaria del río que circula por debajo, un auto sin saberlo intenta cruzarlo a 60 km/hr y cae al vacío. ¿Cuánto tiempo tardará en caer? Y ¿en qué punto tocará a la superficie del agua? Hay 20 m del auto sobre el puente, al agua.



Escogemos un sistema de referencia con origen en la superficie del agua y debajo del final de la losa del puente, entonces:

$$v_{0x} = 60\frac{km}{hr} = 60\frac{km}{hr}\left(\frac{1hr}{3600s}\right)\left(\frac{1000m}{1km}\right) = 16.66m\text{ /s}$$

$x_0 = 0$; $y_0 = 20$ [m] ; $v_{oy} = 0$ [m/s] ; $a_y = g = -9.81$ [m/s/s] ; al llegar al agua $y = 0$ [m]

Como las dos componentes del movimiento ocurren simultáneamente, *al mismo tiempo que cae 20 [m] realiza un desplazamiento Δx.* Entonces, el tiempo lo encontramos del movimiento en y

$$y - y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

Sustituyendo $$0 - 20 = +\frac{1}{2}(-9.81)t^2$$

Despejando $$t = \sqrt{\left(\frac{2(-20)}{-9.81}\right)} = 2.02 \text{ [s]}$$

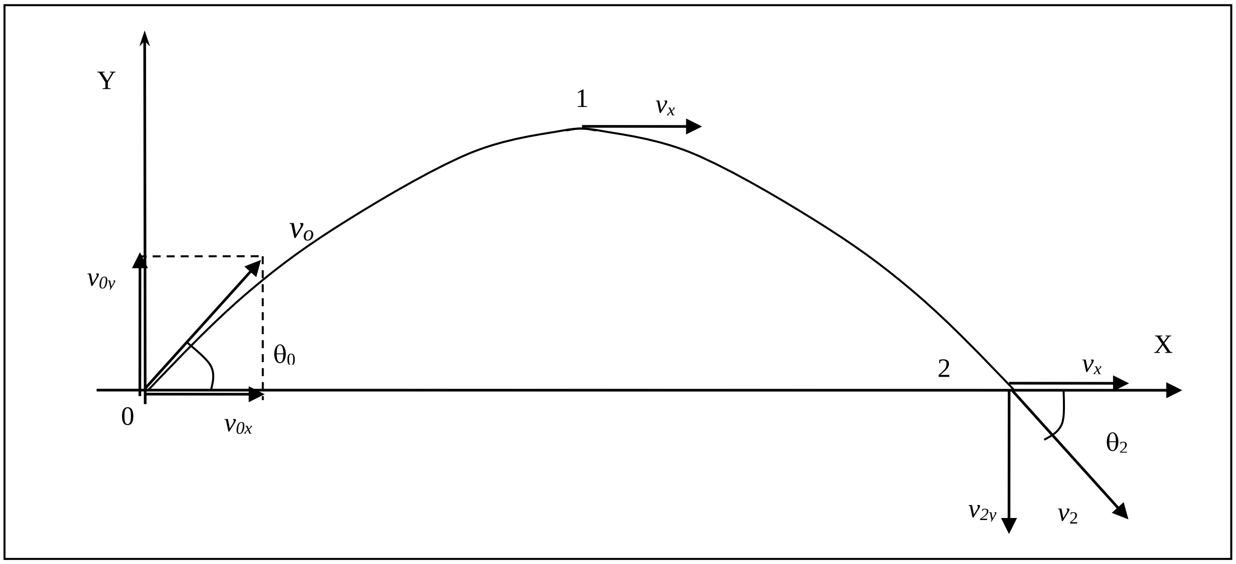
El desplazamiento horizontal es $$\Delta x = x - x_0 = v_x t$$

$$\Delta x = x - 0 = 16.66(2.02) = 33.66 \text{ [m]}$$

Se observa claramente como encontramos el tiempo de “y” y lo sustituimos en “x”

¿Con qué velocidad choca el auto con el agua?

Ejemplo 2.21. Un futbolista patea el balón con una velocidad de 30 m/s y un ángulo de 40º con la horizontal, encontrar: A) la altura máxima, el tiempo y el avance horizontal que corresponden a ese punto. B) El tiempo que tarda en regresar al piso, el punto en que lo hace y la velocidad con la que choca con el piso.



Solución: Ubicamos el origen del sistema de referencia en el punto donde el balón es pateado; además identificaremos el punto de máxima altura como 1 y el lugar donde choca con el piso como punto 2.

Conociendo la velocidad inicial y el ángulo podemos conocer las componentes de la velocidad

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta = 30\cos 40 = 22.98 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 sen\theta = 30 sen 40 = 19.28 \text{ m/s}$$

A) ***El punto de máxima altura tiene como característica distintiva*** que ahí la componente vertical de la velocidad ***vale cero $v_{1y} = 0$***, de manera que al sustituir esta condición en la ec. de velocidad (2.19) se puede conocer el tiempo que tarda en llegar a la altura máxima

$$v_{1y} = v_{0y} + g t_1$$

Despejando

$$t_1 = \frac{v_{1y} - v_{0y}}{g}$$

Como en el punto de altura máxima v_{0y}=0

$$t_1 = \frac{-v_{0y}}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\alpha$$

Debemos tener en cuenta que en el sistema de referencia elegido g = − 9.81m/s^2
Sustituyendo

$$t_1 = \frac{-19.28}{-9.81} = 1.96 \text{ [s]}$$

Sustituyendo en la ec (2.18)

$$y_1 = y_0 + v_{0y} t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$y_1 = 0 + (19.28)(1.96) + \frac{1}{2}(-9.81)(1.96)^2$$

$$y_1 = 18.945 \text{ [m]}$$

Durante ese tiempo, en x avanza:

$$x_1 = x_0 + v_x t_1 = 0 + 22.98(1.96) = 45.04$$

$$x_1 = 45.04 \text{ [m]}$$

B) ***La característica distintiva del punto 2*** es que ***$y_2 = 0$*** sustituyendo esto en la ec. de *"y"* (2.18) s e puede conocer el tiempo

$$y_2 = y_0 + v_{0y}t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2$$

$$0 = 0 + 19.28t_2 + \frac{1}{2}(-9.81)t_2^2$$

Factorizando

$$(19.28 - 4.9t)(t_2) = 0$$

Esto solo ocurre si t = 0 (o sea al inicio del movimiento) o si

$$19.28 - 4.9t_2 = 0$$

$$t_2 = \frac{-19.28}{-4.9} = 3.93 \text{ [s]}$$

Con este tiempo se puede conocer la posición en x

$$x_2 = x_0 + v_x t_2 = 0 + 22.98(3.93) = 90.31 \text{ [m]}$$

Que es donde toca al piso.

Sustituyendo en la ec. de velocidad en y

$$v_{2y} = v_{0y} + gt_2$$

$$v_{2y} = 19.28 + (-9.81)3.93 = -19.27 \text{ [m/s]}$$

Como la velocidad horizontal es constante

$$v_{0x} = v_{2x} = 22.98 \text{ [m/s]}$$

Se puede conocer la magnitud de la velocidad por el teorema de Pitágoras:

$$|v_2| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{22.98^2 + 19.27^2}$$

$$|v_2| = 29.99 \text{ [m/s]}$$

Su orientación se puede conocer mediante el ángulo θ_2

$$\theta_2 = \arctan\frac{v_{2y}}{v_x} = tg^{-1}\frac{-19.27}{22.98} = -39.98°$$

El signo negativo del ángulo indica que se mide de la horizontal hacia abajo (sentido horario).

Podemos observar que:

t_2 es el doble de t_1 y x_2 también es el doble de x_1, la velocidad final es igual a la inicial en valor, al igual que el ángulo, la diferencia es que una va de subida y otra de bajada; todo esto indica que el movimiento es simétrico con respecto a un eje vertical que pase por el vértice de la parábola.

Por otro lado se podría considerar que α es "la fórmula" para encontrar el tiempo correspondiente a la máxima altura

$$t_1 = \frac{-v_{0y}}{g} \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\alpha$$

Además al sustituirla en la ec. de ***y*** (2.18) obtendríamos "la fórmula" para obtener la altura máxima

$$y_1 = y_0 + v_{0y}\frac{-v_{0y}}{g} + \frac{1}{2}g\frac{-v_{0y}{}^2}{g^2}$$

$$y_1 = y_0 - \frac{v_{0y}{}^2}{g} + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}{}^2}{g}$$

$$y_{MAX} = y_0 - \frac{1}{2}\frac{v_{0y}{}^2}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\beta$$

Pero hay que tomar en cuenta el signo de g debido al sistema de referencia, de manera que si consideramos positivo hacia abajo, g sería positiva y la "fórmula" queda

$$y_{MAX} = y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}{}^2}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\delta$$

De manera similar se puede deducir una "formula" para el "tiempo total" tomando en cuenta la simetría del movimiento y que $v_{0y} = -v_{2y}$ o también $v_{2y} = -v_{0y}$ sustituyendo en la ec de velocidad

$$v_{2y} = v_{0y} + gt_2$$

$$-v_{0y} = v_{0y} + gt_2$$

$$\frac{-2v_{0y}}{g} = t_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\varepsilon$$

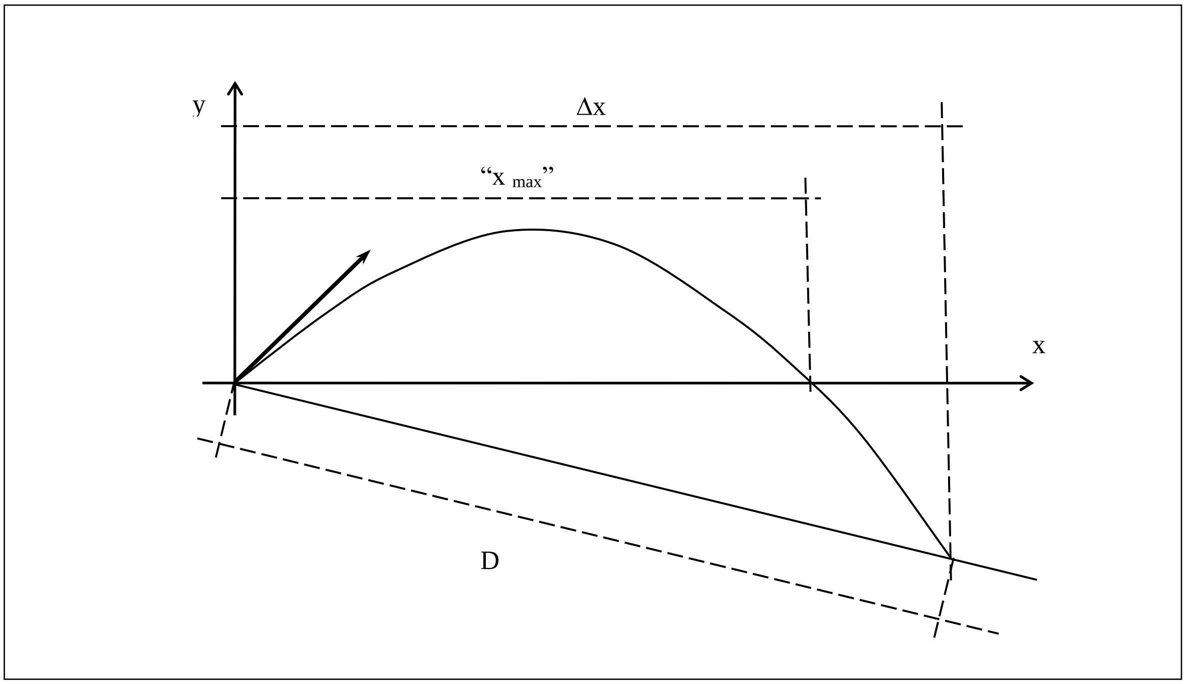
que es el doble t_1

Si sustituimos este tiempo en la ec. de x obtendremos lo que algunos llaman el "alcance máximo"

$$x_2 = x_0 + v_x t_2$$

$$x_2 = x_0 + v_x\frac{-2v_{0y}}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\gamma$$

El problema con este tipo de "formulas" es que además de tenerlas "a la mano" (en un formulario o en la memoria) ***debe tenerse en cuenta las condiciones bajo las cuales fueron deducidas***. Por ejemplo, en este caso el piso horizontal como límite físico es determinante, porque si el piso es inclinado hacia abajo, obviamente el "tiempo total de vuelo" será mayor que el dado por ε, y el "alcance real" o sea, el desplazamiento horizontal Δx hasta tocar el piso, ***será mayor que el "alcance máximo"*** determinado por γ. ***Si las condiciones o supuestos bajo los cuales se dedujeron "las fórmulas" no se cumplen, las dichosas "formulas" no sirven***. *El otro problema de querer resolver los problemas aplicando recetas, es que se inhibe la capacidad de análisis y de interpretación; así como el pensamiento crítico del estudiante, fomentándose la aplicación mecánica y a-crítica, lo que es muy grave en un ingeniero (a) moderno (a), ya que los proceso mecánicos y repetitivos los hacen las computadoras con muchísima mayor velocidad y con menos errores.*



El desplazamiento en x puede ser más grande que el *"alcance máximo"* dado por

$$x_{max} = x_0 + v_x \frac{-2v_{0y}}{g}$$

También puede confundirse con el "alcance máximo inclinado" D que por supuesto tiene otra "formula"

Conclusión: La realidad es compleja, las "soluciones" simplistas tienen un rango de aplicación muy limitado, por lo cual debemos practicar y desarrollar nuestras funciones mentales superiores, como la capacidad de análisis, y el pensamiento crítico, y desechar el mecanicismo.

Ejemplo 2.22. Desde lo alto de una colina en A se dispara un mortero con un ángulo θ = 50º con la horizontal, de manera que hace blanco en B. Determinar el valor de la velocidad del proyectil cuando sale del cañón.

Solución:
Ubicamos el origen del sistema de referencia en el punto A. Como conocemos Δx y Δy podemos utilizar las ecs.

$$\Delta x = v_x t \qquad (1)$$

$$\Delta y = v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Donde aparecen v_X, v_{0Y}, y t como incógnitas. Entonces las escribimos en función de v_0

$$\Delta x = v_0 (\cos\theta) t \qquad (1')$$

$$\Delta y = v_0 (sen\theta) t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2')$$

Despejando t de 1' y Sust. en 2'

$$t = \frac{\Delta x}{v_0 \cos\theta}$$

$$\Delta y = v_0 (sen\theta)\left(\frac{\Delta x}{v_0 \cos\theta}\right) + \frac{1}{2} g \left(\frac{\Delta x}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

$$\Delta y = \Delta x (tg\theta) + \frac{g \Delta x^2}{2\cos^2\theta} \frac{1}{v_0^2} \qquad (3)$$

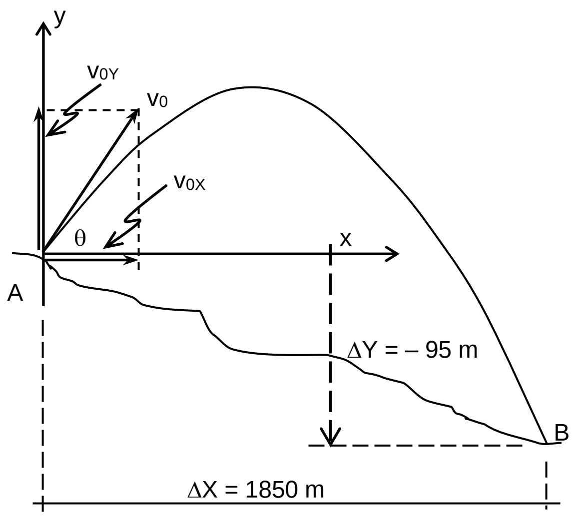
Sust. valores

$$-95 = 1850 (tg 50^o) + \frac{(-9.81)(1850)^2}{2(\cos 50^o)^2} \frac{1}{v_0^2}$$

$$-95 = 2204.7 - 40630061 \frac{1}{v_0^2}$$

$$\frac{1}{v_0^2} = \frac{-2299.7}{-40630061}$$

$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{40630061}{2299.7}\right)} = 132.92 \quad \text{[m/s]}$$



De otra manera:

Sustituyendo valores en 1' y despejando

$$1850 = v_0 t \cos 50^o$$

$$v_0 t = \frac{1850}{0.6428} = 2878 \qquad (1'')$$

Sust. en 2'

$$-95 = v_0 t (sen 50^o) + \frac{1}{2}(-9.81) t^2$$

$$-95 = 2878 (0.766) - 4.9 t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{-95 - 2204.5}{-4.9}} = 21.66 \quad \text{[s]}$$

Sust. en 1''

$$v_0 = \frac{2878}{t} = \frac{2878}{21.66} = 132.9 \quad \text{[m/s]}$$

Ejemplo 2.23. Se lanza una piedra a 80 m/s con un ángulo de 40° con la horizontal, encontrar el punto en el que toca el piso si:

- **a)** El piso está inclinado 10° hacia arriba $\alpha_1 = 10º$
- **b)** El piso está inclinado 10° hacia abajo $\alpha_2 = -10º$

Solución: Como conocemos la v_0 y el ángulo, podemos calcular las componentes

$$Vox = V\cos\theta = 80\cos 40 = 61.28[m/s]$$

$$Voy = Vsen\theta = 80sen40 = 51.42[m/s]$$

Pero al analizar las Ecs. de TP

$$\Delta x = v_{0X}t..........(1)$$

$$\Delta y = v_{0Y}t + \frac{1}{2}gt^2 ....(2)$$

Vemos que no se conocen Δx, Δy ni t; es decir, hay 3 incógnitas. Necesitamos una tercera Ec. que "involucre" o "describa" al piso inclinado. De la fig. podemos ver que

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} ....(3)$$

Sustituyendo (1) y(2) en (3)

$$tg\alpha = \frac{Voy \cdot t + \frac{1}{2}gt^2}{Vox \cdot t} \qquad (4)$$

a) Si el terreno va hacia arriba α es positivo. Sust. valores

$$tg(10) = \frac{51.42t + \frac{1}{2}(-9.81)\cdot t^2}{61.28t}$$

$$tg(10) = \frac{51.42 + \frac{1}{2}(-9.81)\cdot t}{61.28}$$

$$t = \frac{61.28(0.1763) - 51.42}{-4.9}$$

$$t_1 = 8.3[s]$$

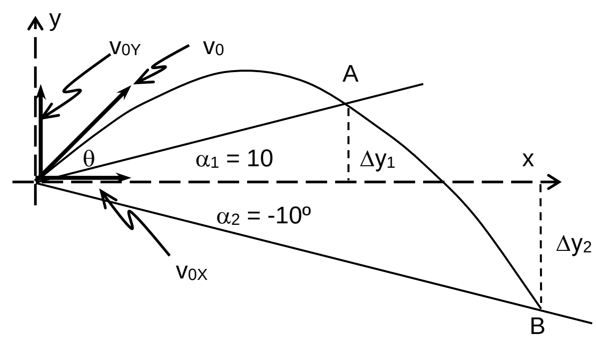
Sustituyendo en (1)y en (2)

$$\Delta x = Vox \cdot t$$

$$\Delta x_1 = 61.28(8.3) = 508.6[m]$$

$$\Delta y = v_{0Y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Delta y_1 = 51.42(8.3) + \frac{1}{2}(-9.81)(8.3)^2 = 88.9[m]$$



b) Si la pendiente de la colina es hacia abajo, el ángulo α es negativo

$$tg(-10) = \frac{51.42t + \frac{1}{2}(-9.81)\cdot t^2}{61.28t}$$

$$-0.1763 = \frac{51.42 + \frac{1}{2}(-9.81)\cdot t}{61.28}$$

$$t = \frac{61.28(-0.1763) - 51.42}{-4.9}$$

$$t = 12.71[s]$$

Sustituyendo en (1) y en (2)

$$\Delta x = Vox \cdot t$$

$$\Delta x_2 = 61.28(12.71) = 778.86[m]$$

$$\Delta y = Voy \cdot t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Delta y = 51.42(12.71) + \frac{1}{2}(-9.81)(12.71)^2$$

$$\Delta y_2 = -138.8[m]$$

Observamos en este caso que el tiempo y el alcance Δx, son mayores que los del inciso a, y que Δy es negativa, lo que concuerda con la figura y con la lógica.

Ejemplo 2.24. Un problema clásico de balística es el de determinar el ángulo de tiro si se conoce la posición del blanco y la velocidad de disparo, aquí lo ilustraremos con el siguiente ejemplo. La velocidad del chorro de agua, a la salida de una manguera, es de 20 m/s, calcular el ángulo necesario para que el chorro llegue al suelo 35 m adelante de donde sale. Suponer piso horizontal.

Solución:

Como no conocemos el ángulo, tampoco las componentes de la velocidad, entonces escribimos las Ecs. de Δx y Δy en función de v_0

$$\Delta x = v_0(\cos\theta)t \qquad (1)$$

$$\Delta y = v_0(sen\theta)t + \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

Despejando t de 1 y Sust. en 2'

$$t = \frac{\Delta x}{v_0 \cos\theta}$$

$$\Delta y = v_0(sen\theta)\left(\frac{\Delta x}{v_0\cos\theta}\right) + \frac{1}{2}g\left(\frac{\Delta x}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

$$\Delta y = \Delta x(tg\theta) + \frac{g\Delta x^2}{2v_0^2}\frac{1}{\cos^2\theta} \qquad (3)$$

aquí las incógnitas son tg θ y $\cos^2\theta$, por lo que echamos mano de la identidad trigonométrica

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + tg^2\theta \qquad (4)$$

Sust. 4 en 3

$$\Delta y = \Delta x(tg\theta) + \frac{g\Delta x^2}{2v_0^2}\left(1 + tg^2\theta\right)$$

$$\Delta y = \Delta x(tg\theta) + \frac{g\Delta x^2}{2v_0^2} + \frac{g\Delta x^2}{2v_0^2}tg^2\theta$$

ordenando

$$\frac{g\Delta x^2}{2v_0^2}tg^2\theta + \Delta x(tg\theta) + \frac{g\Delta x^2}{2v_0^2} - \Delta y = 0 \qquad (4)$$

que es una Ec. de 2º grado con tg θ como incógnita, por lo cual tendrá dos soluciones. Sust. valores

$$\frac{-9.8(35)^2}{2(20^2)}tg^2\theta + 35(tg\theta) + \frac{-9.8(35)^2}{2(20^2)} - 0 = 0$$

$$-15tg^2\theta + 35(tg\theta) - 15 - 0 = 0$$

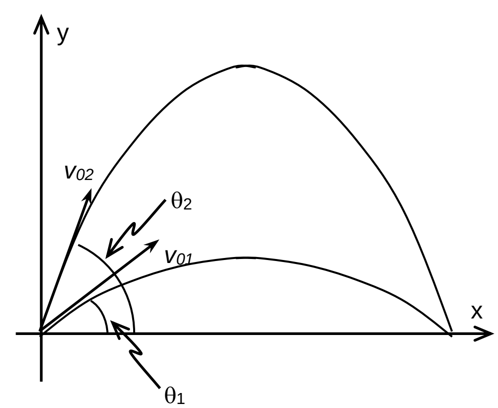
Aplicando la fórmula general para resolver Ecs. de 2º grado

$$tg\theta = \frac{-35 \pm \sqrt{(35^2 - 4(-15)(-15))}}{2(-15)}$$

$$tg\theta = \frac{-35 \pm 18}{-30}$$

$$tg\theta_1 = 0.5662$$
$$tg\theta_2 = 1.7662$$
$$\theta_1 = 29.5185^\circ$$
$$\theta_2 = 60.4815^\circ$$

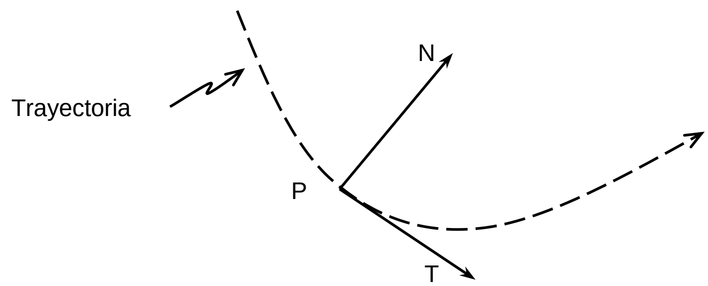
Observamos que $\theta_1 + \theta_2 = 90º$, es decir, ***Cuando el suelo es horizontal***, con ángulos ***complementarios*** se obtiene el mismo alcance.



de manera lógica, el máximo alcance para una v_0 dada se obtiene con $\theta = 45^\circ$

2.14 Movimiento curvilíneo. Coordenadas normal y tangencial.

Como hemos mencionado ***la velocidad de una partícula es un vector tangente a la trayectoria*** mientras que ***la aceleración no*** lo es, esto permite descomponer a la aceleración en dos componentes de acuerdo a un sistema local de coordenadas rectangulares que tiene su origen en la partícula P y se mueve con ella. Un eje será tangente a la trayectoria, con sentido positivo igual al del movimiento, y otro eje tendrá dirección normal o perpendicular a la trayectoria, con sentido positivo hacia el centro de curvatura. A la dirección normal también se le llama centrípeta.



En este sistema la velocidad puede quedar expresada como:

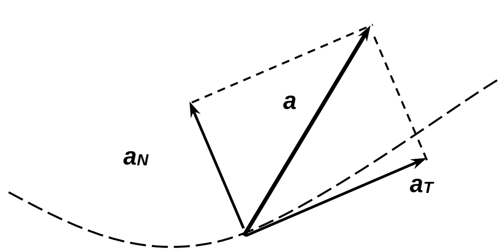
$$\boldsymbol{v} = v\, \boldsymbol{i_T} \qquad (2.23)$$

Donde:

v ***es la magnitud del vector velocidad, también llamada rapidez***.
$\boldsymbol{i_T}$ es el vector unitario en dirección tangencial.

Esta expresión nos indica que no hay componente de la velocidad en dirección normal, es decir $v\, \boldsymbol{i_N} = 0$

La aceleración es: $$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_T} + \boldsymbol{a_N} \qquad (2.25)$$



Donde $$\boldsymbol{a_T} = a_T\, \boldsymbol{i_T} \qquad (2.27)$$

Es la componente de la ***aceleración*** en dirección ***tangencial relacionada con el cambio en la magnitud de la velocidad***, es decir con la rapidez. Es positiva cuando la rapidez aumenta y negativa cuando disminuye.

$$\boldsymbol{a_N} = a_N\, \boldsymbol{i_N} \qquad (2.28)$$

Es la ***aceleración normal o centrípeta*** y está relacionada con ***el cambio en la orientación del vector velocidad***, Como lo demostraremos a continuación.

De la definición de aceleración:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv\boldsymbol{i_T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{i_T} + v\frac{d\boldsymbol{i_T}}{dt} \qquad (2.29)$$

Donde se ve claramente que $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{i_T}$ es la aceleración tangencial $\boldsymbol{a_T}$ por lo tanto, el segundo sumando deberá ser la aceleración normal.

Para comprobarlo, analizaremos su expresión, procediendo en tres pasos:

Primer paso: analizaremos el significado de $d\boldsymbol{i_T}$,

Segundo paso: posteriormente haremos la derivada $\frac{d\boldsymbol{i_T}}{dt}$ y

Tercer paso: finalmente realizaremos el producto $(v)\left(\frac{d\boldsymbol{i_T}}{dt}\right)$

Primer paso:

En la figura A se representa a una partícula que recorre una trayectoria curvilínea y las posiciones que ocupa en el tiempo t_1 y en un instante posterior $t_2 = t+dt$, también se marcan los vectores unitarios tangentes que corresponden a cada posición $\boldsymbol{i_{T1}}$, e $\boldsymbol{i_{T2}}$.

Al moverse la partícula recorre un arco ds, mientras que el radio de curvatura R describe un ángulo dθ igual al formado por los vectores unitarios.

(“Los ángulos con lados perpendiculares son iguales entre sí”)

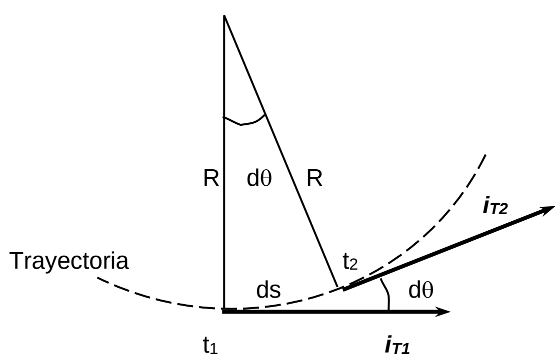


Figura .A

En la figura B hemos dibujado los dos vectores unitarios con un centro común para poder ver la diferencial $d\boldsymbol{i_T}$ que es el cambio del vector unitario tangente.

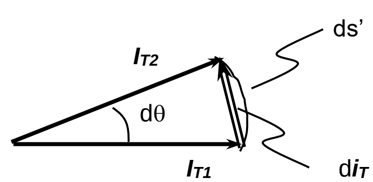


Figura B

En un tiempo tan corto, el cambio del vector unitario tangente es infinitesimal, pero para entenderlo mejor y poder dibujarlo, lo consideraremos como si fuera un cambio finito $\Delta \boldsymbol{i}_T = \boldsymbol{i}_{T2} - \boldsymbol{i}_{T1}$

El cual encontramos utilizamos la regla del paralelogramo. Fig C

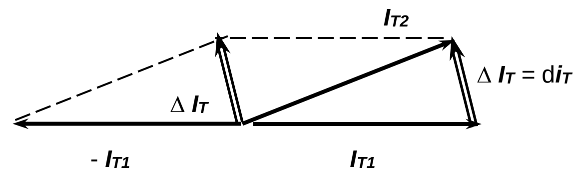
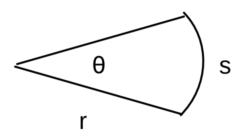


Figura C

Regresando a la Fig. B, como el ángulo dθ es extremadamente pequeño, la diferencia entre la cuerda $d\boldsymbol{i}_T$ y el arco ds' desaparece, de manera que podemos escribir

$$|\ d\boldsymbol{i}_T\ | = ds' \qquad (2.30)$$

Por otro lado, al igual que en cualquier sector circular se cumple la relación entre el arco el ángulo y el radio s = θ r, donde el ángulo tiene que estar expresado en radianes



En este caso queda ds' = 1dθ, ya que el radio es la magnitud del vector unitario. Sustituyendo en 2.30

$$|\ d\boldsymbol{i}_T\ | = ds' = 1d\theta = d\theta \qquad (2.31)$$

Lo que significa que ***el cambio del vector unitario tangente es igual, en magnitud, al ángulo dθ,*** Dicho de otra forma, ***el vector unitario tangente cambia dθ en dirección,*** (ya que su magnitud sigue siendo 1).

Ahora bien, si trasladamos el vector $d\boldsymbol{i}_T$, al dibujo de la trayectoria, nos damos cuenta que apunta hacia el centro de curvatura, es decir ***¡tiene dirección normal!*** (Fig. D). Por lo que podemos escribir

$$d\boldsymbol{i}_T = d\theta\ \boldsymbol{i}_N \qquad (2.32)$$

Como en esta figura también se cumple que

$$ds = R\ d\theta$$

Despejando

$$d\theta = \frac{ds}{R}$$

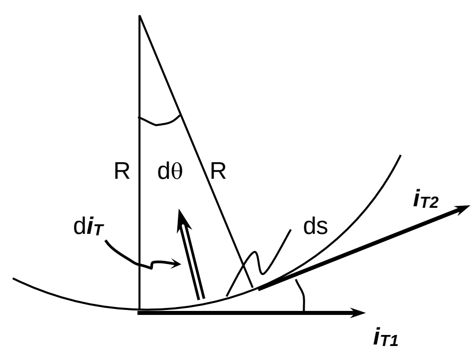


Figura D

Sustituyendo en 2.32

$$d\boldsymbol{i_T} = \frac{1}{R} ds\boldsymbol{i_N} \tag{2.33}$$

Hasta aquí hemos completado la primera parte.

Segundo paso: Ahora estamos en posibilidad de hacer la derivada

$$\frac{d\boldsymbol{i_T}}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt}\boldsymbol{i_N} \tag{2.34}$$

Donde reconocemos a $\frac{ds}{dt}$ como la rapidez v.

Entonces $$\frac{d\boldsymbol{i_T}}{dt} = \frac{1}{R} v\boldsymbol{i_N}$$

Tercer paso: Podemos completar el análisis multiplicando lo anterior por v

$$v\left(\frac{d\boldsymbol{i_T}}{dt}\right) = v\frac{1}{R} v\boldsymbol{i_N} = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{i_N} \tag{2.35}$$

De manera que hemos demostrado que el segundo sumando de la expresión 1.29 tiene orientación normal o centrípeta y al mismo tiempo encontramos una expresión más práctica, por eso escribimos

$$\boldsymbol{a_N} = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{i_N} \tag{2.36}$$

O bien en forma escalar

$$a_N = \frac{v^2}{R} \tag{2.37}$$

Por lo tanto

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{i_T} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{i_N} \tag{2.38}$$

Es decir: $$a_T = \frac{dv}{dt} \tag{2.39}$$

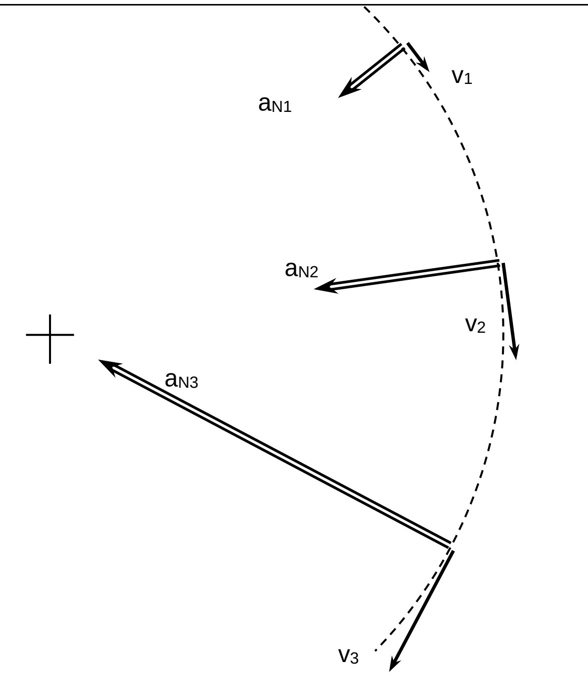
y $$a_N = \frac{v^2}{R} \tag{2.39'}$$

La aceleración tangencial es el cambio de la rapidez en relación al tiempo, la única que existe en el movimiento rectilíneo y que ya conocemos.

La aceleración normal o centrípeta es el cambio en la orientación del vector velocidad.

Analizando la ecuación de la aceleración normal (Ec. 2.39'), vemos que:

- La ***aceleración normal vale cero cuando el radio es infinitamente grande***, es decir en el ***movimiento rectilíneo,*** o cuando la rapidez vale cero $v = 0$.
- Para que ***sea constante*** es necesario que tanto la ***rapidez*** como el ***radio*** sean ***constantes***, esto ocurre solo en el ***movimiento circular uniforme***.
- *En cualquier otro caso* ***la aceleración normal cambia de acuerdo al cuadrado de la rapidez****.*

La ***aceleración normal*** cambia de acuerdo al ***cuadrado de la rapidez*** $$a_N = \frac{v^2}{R}$$ en la figura se observa que ante pequeños aumentos de la rapidez, se obtienen grandes incrementos de la aceleración normal		

Esto nos indica lo peligroso que es viajar en una curva con exceso de velocidad, aunque el tema lo analizaremos ampliamente en la siguiente unidad cuando veamos la fuerza que causa esta aceleración, es decir la *fuerza centrípeta.*

Cuando la aceleración tangencial es constante, a partir de 2.39 se pueden obtener ecuaciones algebraicas semejantes a las del MRUA, quedado

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + a_T t \\ s &= s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_T t^2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2a(s - s_0) \end{aligned}\right\} \qquad (2.40)$$

Procedimiento de análisis:

1.- Dibujar un esquema que represente a la partícula y su trayectoria. Es conveniente especificar el sentido del movimiento, el cual siempre coincide con el de la velocidad. También es acertado utilizar diferente tipo de línea para los vectores velocidad y aceleración.

2.- Aplicar la ecuación 2.39 si la aceleración tangencial es variable y las Ecs. 2.40 si $\boldsymbol{a_T}$ es constante. La aceleración normal solo está dada por 2.39’. Y debemos tener en cuenta que en general ***la aceleración normal cambia de un punto a otro o de un momento a otro, de acuerdo al cuadrado de la rapidez***. Por brevedad solo abordaremos problemas con radio constante, esto es movimiento circular.

Ejemplo 2.25: Un auto toma una curva circular de 500m de radio con una rapidez constante de 80 Km/hr, calcular las componentes tangencial y normal de su aceleración

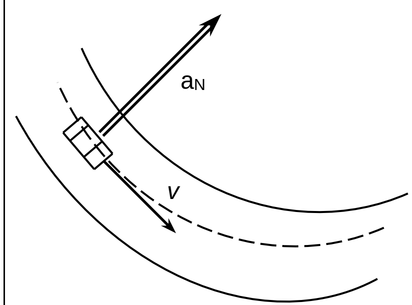
Solución:

La aceleración tangencial es el cambio en la magnitud de la velocidad (rapidez) respecto al tiempo, como en este caso la rapidez es constante, entonces:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0$$

La aceleración normal es:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{22.22^2}{500} = 0.988 \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$



Ejemplo 2.26. Al tomar una curva circular de 350 m de radio, un auto reduce su rapidez de manera uniforme desde 110 Km/hr hasta 70 km/hr en 15 [s], calcular su aceleración cuando han pasado 10 segundos de haber empezado a frenar.

Solución:

v_1 = 110Km/hr = 30.55 m/s
v_2 = 70Km/hr = 19.44 m/s

La aceleración tangencial es constante

$$v_2 = v_1 + a_T t$$

$$a_T = \frac{v_2 - v_1}{t} = \frac{19.44 - 30.55}{15} = -0.74 \quad [\text{ m/s/s }]$$

10 segundos después de haber empezado a frenar su rapidez es:

$$v_3 = v_1 + a_T t = 30.55 - 0.74(10) = 23.15 \quad [\text{m/s}]$$

y su aceleración normal o centrípeta es:

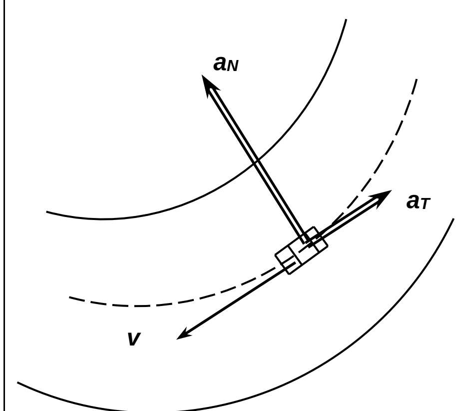
$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{23.15^2}{350} = 1.53 \quad [\text{ m/s/s }]$$

y la magnitud de la aceleración total o simplemente aceleración será

$$a = \sqrt{\left(a_T^2 + a_N^2\right)} = \sqrt{\left(0.74^2 + 1.53^2\right)} = 1.7 \ [\text{m/s/s}]$$

y su orientación estará definida por

$$\theta = angtg\frac{a_N}{a_T} = angtg\frac{1.53}{0.74} = 64.18°$$ Respecto a la dirección tangente del lado negativo.



El dibujo está incompleto, ¿podrías ubicar los puntos 1, 2, 3 en la trayectoria, el vector aceleración y el ángulo θ?

2.15 Cuestionario de Cinemática

1. ¿Cuál es el objeto de estudio de la Dinámica?
2. ¿En qué partes se divide la Dinámica?
3. ¿Cuál es el objeto de estudio de la Cinemática?
4. ¿Qué es una partícula?
5. ¿Qué ventajas se obtiene de considerar a un cuerpo como partícula?
6. ¿Qué es la posición y como se especifica?
7. Define desplazamiento y escribe su ecuación para una, dos y tres dimensiones.
8. ¿Qué es la trayectoria y que la distancia recorrida?
9. ¿En qué casos la distancia recorrida es diferente de la magnitud del desplazamiento.
10. ¿Cuánto vale el desplazamiento de una partícula que describe una trayectoria cerrada?
11. ¿Qué es la velocidad media y cuál es su ecuación?
12. ¿Qué relación hay entre velocidad y rapidez?
13. Escribe la definición matemática de la velocidad instantánea.
14. Escribe la definición matemática de la aceleración.
15. ¿Cuál es el significado de las unidades de aceleración, por ejemplo m/s/s?
16. Escribe la ecuación cinemática diferencial que no contiene al tiempo.
17. ¿Cuándo se deben usar las ecuaciones cinemáticas generales (diferenciales) y cuándo las algebraicas?
18. Escribe las tres ecuaciones algebraicas del movimiento rectilíneo y explica cuándo deben usarse.
19. ¿Qué son los movimientos simultáneos y cuáles los movimientos dependientes?
20. ¿Cuál es la recomendación más importante para solucionar los movimientos simultáneos
21. ¿Cuáles son los pasos para resolver los movimientos dependientes?
22. ¿Cuáles son los dos movimientos rectilíneos en que se descompone un tiro parabólico?
23. Define aceleración normal y aceleración tangencial.
24. ¿Qué otro nombre tiene la aceleración normal?
25. ¿Cuánto vale la aceleración tangencial de un cuerpo que se mueve en una trayectoria circular con rapidez constante?
26. ¿Cómo es la trayectoria de un cuerpo si su aceleración normal vale cero?